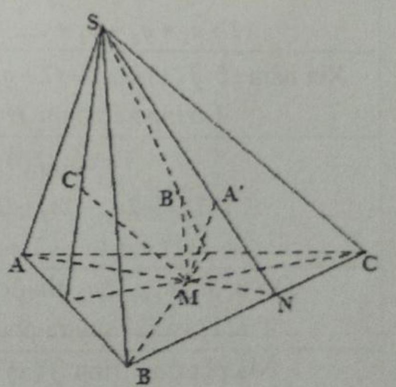
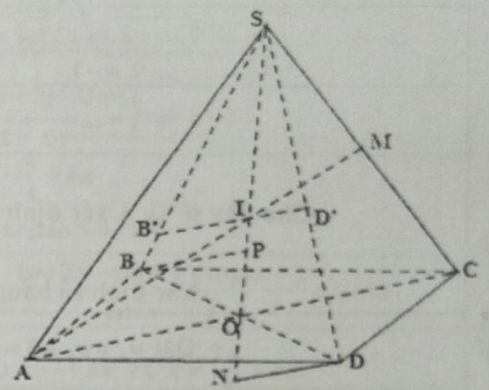
HƯỚNG DẪN CHẤM THI ÔLYMPIC CỤM

Môn toán – Khối 11

Câu	Nội dung	Điểm
1a (2,0đ)	**Giải phương trình $2\sin^2 x - 2\sin 2x - 4\cos^2 x = 1$**	
	$pt \Leftrightarrow 2\sin^2 x - 4\sin x\cos x - 4\cos^2 x = 1$ (1) Nhận xét: $\cos x = 0$ không là nghiệm của (1) suy ra $\cos x \neq 0$	0,5
	Chia hai vế pt(1) cho $\cos^2 x$ ta được: $\tan^2 x - 4\tan x - 5 = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow (\tan x + 1)(\tan x - 5) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = -1 \\ \tan x = 5 \end{array}\right.$	0,5
	$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan 5 + k\pi \end{array}\right.$	0,5
1b (2,0đ)	**Giải phương trình $\frac{(\sin 2x - \sin x + 4)\cos x - 2}{\tan x + \sqrt{3}} = 0$ (1)**	
	Đk: $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \tan x \neq -\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ và $x \neq \frac{2\pi}{3} + k\pi$	0,5
	$(1) \Leftrightarrow \sin 2x.\cos x - \frac{1}{2}\sin 2x + 4\cos x - 2 = 0$ $\Leftrightarrow \sin 2x(\cos x - \frac{1}{2}) + 4(\cos x - \frac{1}{2}) = 0 \Leftrightarrow (\cos x - \frac{1}{2})(\sin 2x + 4) = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi$	0,5
	Đối chiếu đk. Kết luận nghiệm phương trình là: $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$	0,5
2a (2,0đ)	**Tìm số tự nhiên k sao cho ba số C_7^k; C_7^{k+1}; C_7^{k+2} theo thứ tự lập thành cấp số cộng.**	
	Đk: $k \in N, 0 \leq k \leq 5$. Ba số C_7^k; C_7^{k+1}; C_7^{k+2} lập thành cấp số cộng $\Leftrightarrow C_7^k + C_7^{k+2} = 2C_7^{k+1}$	0,5
	$\Leftrightarrow \frac{7!}{k!(7-k)!} + \frac{7!}{(k+2)!(5-k)!} = 2.\frac{7!}{(k+1)!(6-k)!}$	0,5
	$\Leftrightarrow .... \Leftrightarrow k^2 - 5k + 4 = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 1 \\ k = 4 \end{array}\right.$ (thỏa mãn đk). Kết luận	0,5
2b (2,0đ)	**Trong một hộp kín đựng 40 tấm thẻ như nhau được đánh số từ 1 đến 40. Lấy ngẫu nhiên ba tấm thẻ trong hộp. Tính xác suất để lấy được ba tấm thẻ mà tổng các số trên ba tấm thẻ đó là một số chia hết cho 3.**	
	Số phần tử của không gian mẫu là: $\lvert\Omega\rvert = C_{40}^3$	0,5
	Trong 40 thẻ có: $\frac{39-3}{3} + 1 = 13$ thẻ mang số chia hết cho 3. Tương tự có 14 thẻ mang số chia cho 3 dư 1 và 13 thẻ mang số chia cho 3 dư 2	0,5
	Để tổng ba số ghi trên ba thẻ là một số chia hết cho 3 thì có các khả năng sau: i, Cả ba thẻ đều mang số chia hết cho 3: Có C_{13}^3 khả năng ii, Cả ba thẻ đều mang số chia cho 3 dư 1: Có C_{14}^3 khả năng iii, Cả ba thẻ đều mang số chia cho 3 dư 2: Có C_{13}^3 khả năng iV, Một thẻ mang số chia hết cho 3, một thẻ mang số chia cho 3 dư 1, một thẻ mang số chia cho 3 dư 2: Có $C_{13}^1.C_{14}^1.C_{13}^1$ khả năng.	0,5

	$\Rightarrow \lvert\Omega_A\rvert = C_{13}^3 + C_{14}^3 + C_{13}^3 + C_{13}^1 C_{14}^1 C_{13}^1$. Vậy $P(A) = \dfrac{127}{380}$	0,5
3a (2,0đ)	**Tính:** $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt{x^2+3}.\sqrt[2018]{3x-2}-2}{x-1}$	
	$= \lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt{x^2+3}.\sqrt[2018]{3x-2}-2.\sqrt[2018]{3x-2}+2.\sqrt[2018]{3x-2}-2}{x-1}$	0,5
	$= \lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt[2018]{3x-2}.(\sqrt{x^2+3}-2)}{x-1} + \lim\limits_{x\to1} \dfrac{2.(\sqrt[2018]{3x-2}-1)}{x-1}$	0,5
	$= \ldots = \dfrac{1}{2} + \dfrac{6}{2018} = \dfrac{1015}{2018}$	1,0
3b (2,0đ)	**Cho dãy số (u_n) xác định bởi:** $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = \dfrac{-14u_{n-1}-51}{5u_{n-1}+18} \end{cases} \forall n \ge 2,\ n \in N$ **Xác định số hạng tổng quát của dãy số (u_n).**	
	Đặt $u_n = a_n - 3 = \dfrac{-14(a_{n-1}-3)-51}{5(a_{n-1}-3)+18}$	0,5
	$\Leftrightarrow a_n = \dfrac{a_{n-1}}{5a_{n-1}+3} \Rightarrow \dfrac{1}{a_n} = 5 + \dfrac{3}{a_{n-1}}$	0,5
	$\Rightarrow \dfrac{1}{a_n} + \dfrac{5}{2} = 3\left(\dfrac{1}{a_{n-1}} + \dfrac{5}{2}\right) \Rightarrow \dfrac{1}{a_n} + \dfrac{5}{2} = \left(\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{5}{2}\right).3^{n-1}$	0,5
	$\Rightarrow \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{11.3^{n-1}-10}{4} \Rightarrow a_n = \dfrac{4}{11.3^{n-1}-10} \Rightarrow u_n = \dfrac{4}{11.3^{n-1}-10} - 3$	0,5
4a (3,0đ)	Cho tứ diện $SABC$ và một điểm M nằm trong tam giác ABC. Các đường thẳng đi qua M lần lượt song song với các đường thẳng SA, SB, SC cắt các mặt phẳng $(SBC), (SCA), (SAB)$ tại A', B', C'. Gọi N là giao điểm của SA' với BC. Chứng minh ba điểm A, M, N thẳng hàng và biểu thức $P = \dfrac{MA'}{SA} + \dfrac{MB'}{SB} + \dfrac{MC'}{SC}$ không phụ thuộc vào vị trí điểm M trong tam giác ABC.	
	Vì $A'M // SA$ nên có mặt phẳng $(A'M, SA)$ Mặt phẳng này và mặt phẳng (ABC) có ba điểm chung là A, M, N do đó ba điểm A, M, N phải nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng trên. Vậy ba điểm A, M, N thẳng hàng. 	1,0
	Xét hai tam giác MBC và ABC có chung đáy $BC \Rightarrow \dfrac{S_{\Delta MBC}}{S_{\Delta ABC}} = \dfrac{MN}{AN}$ (1)	0,5
	Mặt khác ta có $A'M // SA \Rightarrow \dfrac{MN}{AN} = \dfrac{MA'}{SA}$ (2) Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{MA'}{SA} = \dfrac{S_{\Delta MBC}}{S_{\Delta ABC}}$	0,5
	Chứng minh tương tự ta có: $\dfrac{MB'}{SB} = \dfrac{S_{\Delta MCA}}{S_{\Delta ABC}}$; $\dfrac{MC'}{SC} = \dfrac{S_{\Delta MAB}}{S_{\Delta ABC}}$	0,5

	$\Rightarrow P=\dfrac{MA'}{SA}+\dfrac{MB'}{SB}+\dfrac{MC'}{SC}=\dfrac{S_{\Delta MBC}+S_{\Delta MCA}+S_{\Delta MAB}}{S_{\Delta ABC}}=1$ (đpcm)	0,5
4b **(3,0đ)**	**Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và M là trung điểm của cạnh SC. Một mặt phẳng (P) chứa AM và lần lượt cắt các cạnh SB,SD tại các điểm B',D' khác S. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $T=\dfrac{SB'}{SB}+\dfrac{SD'}{SD}$.**	
	Lấy $O=AC\cap BD$ và $I=AM\cap SO$ ta có: S,I,O là các điểm chung của 2 mặt phẳng (SAC) và (SBD) $\Rightarrow S,I,O$ thẳng hàng. Và I là trọng tâm các mặt chéo SAC $\Rightarrow \dfrac{SI}{SO}=\dfrac{2}{3}$  	0,5
	Vẽ $BP\,//\,B'I$ và $DN\,//\,D'I$, $(P,N\in SO)\Rightarrow OP=ON$. Đặt $x=\dfrac{SD}{SD'};\ y=\dfrac{SB}{SB'}$ $\Rightarrow x+y=\dfrac{SB}{SB'}+\dfrac{SD}{SD'}=\dfrac{SP}{SI}+\dfrac{SN}{SI}=\dfrac{2.SO}{SI}=2.\dfrac{3}{2}=3\Rightarrow x,y\in[1;2]\ (*)$	1,0
	Suy ra: $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{3}{xy}\geq 3\left(\dfrac{2}{x+y}\right)^2=\dfrac{4}{3}$ Vậy $MinT=\dfrac{4}{3}$ khi $B'D'\,//\,BD$	0,5
	Từ (*): $1\leq x\leq 2\Leftrightarrow (x-1)(x-2)\leq 0\Leftrightarrow x^2-3x+2\leq 0\Leftrightarrow x(3-x)\geq 2\Leftrightarrow xy\geq 2$ $\Leftrightarrow \dfrac{3}{xy}\leq\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow\dfrac{x+y}{xy}\leq\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\leq\dfrac{3}{2}\Rightarrow MaxT=\dfrac{3}{2}$ khi $B'\equiv B$ hoặc $C'\equiv C$	1,0
5 **(2,0đ)**	**Cho n số $a_1,a_2,a_3,.....,a_n$ thuộc $[0;2]$. Chứng minh rằng:** **$(2+a_1+a_2+a_3+.....+a_n)^2\geq 4(a_1^2+a_2^2+a_3^2+.....+a_n^2)$ với mọi $n\in N^*$**	
	Xét hàm số $f(x)=x^2-(2+a_1+a_2+a_3+.....+a_n)x+(a_1^2+a_2^2+a_3^2+....+a_n^2)$ Có tập xác định $D=R$ suy ra $f(x)$ liên tục trên R (1)	0,5
	Ta có: $f(0)=a_1^2+a_2^2+a_3^2+......+a_n^2\geq 0$ $f(2)=-2a_1-2a_2-2a_3-.....-2a_n+a_1^2+a_2^2+a_3^2+......+a_n^2$ $\Leftrightarrow f(2)=a_1(a_1-2)+a_2(a_2-2)+a_3(a_3-2)+.....+a_n(a_n-2)$	0,5
	Do $a_1,a_2,a_3,.....,a_n$ thuộc $[0;2]$ suy ra $f(2)\leq 0\Rightarrow f(0).f(2)\leq 0$ (2) Từ (1) và (2) suy ra phương trình $f(x)=0$ có nghiệm $x\in[0;2]$	0,5
	Mà phương trình $f(x)=0$ là phương trình bậc hai suy ra $\Delta\geq 0$ $\Leftrightarrow (2+a_1+a_2+a_3+.....+a_n)^2\geq 4(a_1^2+a_2^2+a_3^2+.....+a_n^2)$ (đpcm)	0,5