SỞ GD&ĐT HÀ NỘI

MÃ SKKN

SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP TÌM

SỐ HẠNG TỔNG QUÁT CỦA DÃY SỐ TRUY HỒI

MÔN: TOÁN HỌC

CẤP HỌC: THPT

NĂM HỌC 2016 – 2017

PHẦN I: ĐẶT VẤN ĐỀ

I. LÍ DO CHỌN ĐỀ TÀI

Trong chương trình học của học sinh từ bậc Tiểu học đến Trung học cơ sở (THCS) và Trung học phổ thông (THPT), Toán là một bộ môn rất quan trọng, trang bị cho các em những kiến thức hết sức cần thiết và cơ bản của toán phổ thông nhằm giúp các em tiếp tục học lên cao hoặc áp dụng vào ngành nghề và cuộc sống của các em sau này. Bên cạnh đó kiến thức về toán còn giúp học sinh học được các môn tự nhiên khác có trong chương trình.

Riêng phân môn Đại số lại có ba mảng lớn đó là: Số học, Đại số và Giải tích. Phần Số học và Đại số các em được học tương đối nhiều và kỹ lưỡng từ bậc Tiểu học, qua THCS và hết một học kì của lớp 11 bậc THPT, phần còn lại là Giải tích, mảng kiến thức này thuộc lĩnh vực Toán hiện đại nó có rất nhiều ứng dụng trong thực tế cũng như giúp các em học và nghiên cứu các lĩnh vực khác, chẳng hạn như:

- Khảo sát và vẽ đồ thị một số hàm số quan trọng
- Chứng minh phương trình có nghiệm trong 1 khoảng
- Tính được diện tích hình thang cong, tam giác cong
- Tính thể tích của khối tròn xoay
- Tính quãng đường, vận tốc, gia tốc, cường độ dòng điện ….

Song khi học sang lĩnh vực Giải tích, đại đa số các em học sinh gặp rất nhiều khó khăn bởi một số nguyên nhân sau:

Thứ nhất: Đây là một lĩnh vực mới mà khi tiếp cận cái mới các em đều phải mất một thời gian làm quen, rồi tìm hiểu, ghi nhớ, luyện tập, … dần dần mới nắm bắt và thành thục được cái mới đó.

Thứ hai: Thời lượng học bộ môn Giải tích lại tương đối ngắn chỉ học trong hơn một năm, chiếm khoảng 1/8 thời gian học từ Tiểu học đến hết THPT. Cho nên nhiều em chưa kịp nắm bắt hết cái hay cái đẹp cái ý nghĩa thực tế của bộ môn này đã phải làm các bài toán ứng dụng chuyên sâu của mảng kiến thức, nên nhiều em không nắm chắc và không có hứng thú học phần kiến thức này.

Thứ ba: Các em đã được học rất nhiều Toán ở các lớp dưới về lĩnh vực Số học và Đại số. Hai lĩnh vực này có lối tư duy tương đối giống nhau đó là tư duy cụ thể. Sang mảng Giải tích có lối tư duy khác hẳn đó là tư duy trừu tượng. Lối tư duy cụ thể đã in đậm, hằn sâu trong trí óc của học trò. Một vấn đề được đặt ra sau khi phân tích và đi đến cách giải quyết, cuối cùng là đưa ra được kết quả thì kết quả đó các em phải kiểm tra lại được là đúng với yêu cầu của vấn đề đặt ra. Nhưng lĩnh vực giải tích thì lại không hoàn toàn như vậy. Một ví dụ đơn giản như dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1}{n}$ ta nói nó có giới hạn là 0 khi $n \to +\infty$, nhưng các em học sinh lại không thể tìm được số tự nhiên n nào để $u_n = 0$. Vậy là nhiều em học sinh học đến phần này tỏ ra nghi ngờ và không tin tưởng vào các kiến thức đó.

Cuối cùng vì lí do các em mới có quá ít kiến thức thuộc lĩnh vực Giải tích và xu thế giảm bớt tính hàn lâm trong sách giáo khoa bậc học phổ thông nên hầu hết các định lí trong phần này đều buộc các em công nhận, mà không chứng minh phần nào làm cho tâm lí học sinh thiếu tin tưởng vào kết quả và nảy sinh nghi ngờ cả những bài toán của thầy và trò tiến hành giải.

Để giúp các em học sinh thấy được một phần cái hay, cái đẹp và nhiều ứng dụng thực tế của Giải tích, củng cố, đào sâu thêm kiến thức về dãy số để các em tự tin giải quyết tốt các bài kiểm tra trên lớp, thi học kì và thi học sinh giỏi nên tôi đã chọn đề tài: ***Một số phương pháp tìm số hạng tổng quát của dãy số truy hồi*** để giảng dạy cho các em trên lớp, những buổi ngoại khóa hay bồi dưỡng học sinh giỏi. Từ đó gợi mở hứng thú, khám phá, tìm tòi đối với phân môn: Giải tích cũng như bộ môn toán của các em học sinh, giúp nâng cao chất lượng giáo dục toàn diện cho học sinh và góp phần thực hiện thắng lợi nhiệm vụ chính trị của nhà trường trong từng năm học.

II. MỤC ĐÍCH CỦA SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

- Giúp các em nắm chắc được khái niệm về dãy số
- Nắm được một số phương pháp tìm số hạng tổng quát của dãy số
- Từ đó học tốt phần giới hạn của dãy số và các phần kiến thức tiếp theo
- Khơi dậy lòng đam mê sáng tạo và say mê với bộ môn Toán.

III. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

1) Phương pháp phân tích.

- Từ một đề toán cho trước bằng cách phân tích đi lên để dẫn đến cách giải bài toán đó.
- Từ kinh nghiệm giải một số bài toán đã gặp, bằng phương pháp phân tích đi xuống ta tìm ra lời giải.

2) Phương pháp tổng hợp, tổng quát hóa

Sau khi phân tích bài toán ta có lời giải tổng hợp của bài toán đó. Từ đó bằng phương pháp tổng quát hóa ta có lời giải cho cả một lớp bài toán tương tự

3) Phương pháp so sánh, đối chứng

IV. ĐỐI TƯỢNG VÀ PHẠM VI NGHIÊN CỨU

- Đối tượng: Học sinh lớp 11A1
- Phạm vi nghiên cứu: Dùng thời lượng dạy trên lớp về phần dãy số theo PPCT của Bộ GD&ĐT

Dạy các tiết tự chọn theo chủ đề thống nhất của tổ chuyên môn

Kết hợp với khoảng thời gian ôn tập cuối chương.

Dạy ngoại khóa hoặc bồi dưỡng học sinh giỏi lớp 11 theo kế hoạch của nhà trường

PHẦN II: NỘI DUNG ĐỀ TÀI

Dãy số là phần đầu tiên của lĩnh vực Giải tích mà các em học sinh lớp 11 được tiếp xúc, đây là một phần kiến thức khó đòi hỏi học sinh phải tư duy theo lối trừu tượng và tầm suy nghĩ để giải quyết bài toán là tương đối xa và khó đối với đại đa số học sinh nên nếu chỉ dạy lướt qua thì học sinh rất khó nắm vững phần dãy số - mà đó lại là nền tảng của kiến thức Giải tích, sẽ kéo theo khó khăn khi các em học chương trình Giải tích của các lớp tiếp theo. Do đó tôi đã chọn 1 chuyên đề: Tìm số hạng tổng quát của dãy số truy hồi để bồi dưỡng cho các em với một số lí do sau đây:

- Thứ nhất: Trang bị đầy đủ thêm kiến thức lí thuyết và đặc biệt là các thủ thuật để giải quyết bài toán tìm số hạng tổng quát của một dãy số, giúp các em phân dạng loại toán này và sau đó biết quy bài toán cần giải quyết về các dạng quen thuộc để đưa ra cách giải.

- Thứ hai: Khi đã nắm vững phần dãy số sẽ giúp các em học tốt các phần kiến thức tiếp theo như: Giới hạn của dãy số, hàm số và các phần kiến thức giải tích sau này.
- Thứ ba: Tạo hứng thú cho các em học sinh, nhất là đối tượng học sinh khá, giỏi tìm tòi để phát hiện ra những bài toán mới, dạng toán mới làm tiền đề cho những phát minh sau này. Kích thích sự say mê, sáng tạo, đam mê phân môn giải tích nói riêng và bộ môn toán nói chung.

I. THỰC TRẠNG KHI CHƯA THỰC HIỆN ĐỀ TÀI

Sau khi dạy xong chương III: Dãy dố, cấp số cộng cấp số nhân của lớp 11 Ban cơ bản, theo PPCT tôi cho các em học sinh kiểm tra 45 phút với đề bài như sau:

<u>Bài 1</u> (3 điểm). Cho n là số tự nhiên. Chứng minh rằng:

$$(1-\frac{4}{1})(1-\frac{4}{9})...(1-\frac{4}{(2n-1)^2}) = \frac{1+2n}{1-2n}$$

<u>Bài 2</u> (6 điểm). Tìm u_1, d và S_{10} của cấp số cộng. Biết:

1) $\begin{cases} u_1 + u_5 = 10 \\ u_4 + u_6 = 18 \end{cases}$

2) $\begin{cases} u_1 + u_5 = 10 \\ u_2.u_6 = 28 \end{cases}$

<u>Bài 3</u> (1 điểm). Cho dãy số (u_n) có: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = 3 \\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n + 4 \end{cases}$ với $n \in N^*$

Tính u_{2011}.

Kết quả bài kiểm tra của lớp 11A1 có sĩ số 44 học sinh như sau:

Diễn giải / Kết quả		Bài 3	Cả 3 bài	Ghi chú
Loại Giỏi	Số lượng	5	37	
	Tỉ lệ %	11,4	84,1	
Loại Khá	Số lượng	0	5	
	Tỉ lệ %		11,4	

Loại TB	**Số lượng**	0	2	
	Tỉ lệ %		4,5	
Loại Yếu	**Số lượng**	0	0	
	Tỉ lệ			
Loại Kém	**Số lượng**	39	0	
	Tỉ lệ	88,6		

Nhìn bảng tổng hợp kết quả này và đặc biệt có cả cột thống kê kết quả của bài 3 (dãy số), ta có một số nhận xét sau:

- Chất lượng đại trà của lớp 11A1(lớp điểm của trường) là tương đối tốt, các em đã nắm chắc kiến thức cơ bản biểu hiện bằng kết quả 95,5% đạt kế quả Khá và Giỏi.

- Song bên cạnh đó bài toán phân loại thuộc loại toán về dãy số còn ít học sinh vượt qua được. Điều đó chứng tỏ rằng: Việc tự học, tự tìm hiểu sâu kiến thức của các em còn rất hạn chế, một phần do khả năng của các em, một phần do chưa được trang bị những kiến thức chuyên sâu nên chỉ có 5/44 học sinh giải quyết được bài 3. Số còn lại hoặc do hết thời gan làm bài hoặc do không có ý tưởng để giải quyết bài toán đó nên không vượt qua được bài 3.

II. CÁC BIỆN PHÁP THỰC HIỆN

- Nhắc lại các kiến thức cũ có liên quan để học phần mới
- Bổ xung một số kiến thức mới cần thiết
- Đưa ra một số mẫu toán mới, phân tích tìm lời giải, tổng quát hóa và các em học sinh ghi nhận.

III. NHỮNG GIẢI PHÁP KHOA HỌC TIẾN HÀNH

1) Kiến thức cần nhắc lại

+ Dãy số:

- Định nghĩa: Cho tập hợp các số tự nhiên khác rỗng M = {1; 2; 3; . . . ; m} dãy số là hàm số u đi từ tập M vào R biến mỗi phần tử $n \in M$ thành u(n)

- Cách cho dãy số: có 3 cách là liệt kê, nêu tính chất đặc trưng và cho bằng công thức truy hồi.

+ Cấp số cộng:

- Định nghĩa: Là dãy số mà mỗi số hạng (kể từ số thứ 2) đều bằng số đứng ngay trước nó cộng thêm một số nhất định.

- Tính chất: Số hạng tổng quát $u_n = u_1 + (n - 1)d$

Tổng n số hạng đầu tiên: $S_n = \dfrac{(u_1 + u_n)n}{2} = \dfrac{[2u_1 + (n-1)d].n}{2}$

Tính chất trung bình cộng: $u_{k-1} + u_{k+1} = 2u_k$

+ Cấp số nhân:

- Định nghĩa: Là dãy số mà mỗi số hạng (kể từ số thứ 2) đều bằng số đứng ngay trước nó nhân thêm một số nhất định.

- Tính chất: Số hạng tổng quát $u_n = u_1.q^{n-1}$

Tổng n số hạng đầu tiên: $S_n = \dfrac{u_1(q^n - 1)}{q - 1}$

Tính chất trung bình cộng: $u_{k-1}.u_{k+1} = u_k^2$

2) Một số phương pháp tìm số hạng tổng quát của dãy số truy hồi.

2.1 <u>Dạng 1</u>: ***Tìm số hạng tổng quát của dãy số*** (u_n) ***biết*** $u_1 = a$ ***và*** $u_n = u_{n-1} + b$ $(n > 1)$

a) Cách giải.

- Từ giả thiết: $u_n = u_{n-1} + b \rightarrow (u_n)$ là cấp số cộng
- Vậy: $u_n = u_1 + (n - 1).d = a + (n - 1).b$

b) Ví dụ:

Ví dụ 1: Cho dãy số (u_n) biết: $u_1 = 1$, $u_{n+1} = u_n + 3$. Tính u_n

* Phân tích để tìm lời giải

- Từ giả thiết $u_{n+1} = u_n + 3$, ta có dãy số (u_n) là một cấp số cộng
- Dựa vào tính chất cấp số cộng. Tính được u_n.

* Lời giải.

Từ giả thiết $u_{n+1} = u_n + 3$, ta có dãy số (u_n) là một cấp số cộng có $u_1 = 1$ và công sai $d = 3$.

Vậy $u_n = u_1 + (n - 1)d = 1 + (n - 1).3 = 3n - 2$.

Ví dụ 2: Cho dãy số (u_n) có: $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_n = u_{n-1} + n \end{cases}$ $(n>1)$. Tính u_n.

* Phân tích để tìm lời giải.

- Từ giả thiết: $u_n = u_{n-1} + n \rightarrow u_n - u_{n-1} = n$

- Nếu đặt: $u_n - u_{n-1} = v_{n-1}$ thì (v_n) là 1 cấp số cộng. Tính được v_n ta sẽ tính được u_n.

* Lời giải.

Từ giả thiết: $u_n = u_{n-1} + n \rightarrow u_n - u_{n-1} = n$

Áp dụng công thức trên ta có: $u_n - u_{n-1} = n$

$u_{n-1} - u_{n-2} = n - 1$

…

$u_2 - u_1 = 2$

$$u_n - u_1 = n + (n - 1) + \ldots + 2 = \frac{(n+2)(n-1)}{2}$$

Vậy $u_n = \frac{(n+2)(n-1)}{2} + 2$

2.2 <u>Dạng 2</u>: ***Tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n) biết $u_1 = a$ và $u_n = u_{n-1}.b$***

a) Cách giải.

- Từ giả thiết: $u_n = u_{n-1}.b \rightarrow (u_n)$ là cấp số nhân
- Vậy: $u_n = u_1.q^{n-1} = a.b^{n-1}$

b) Ví dụ:

Ví dụ 3: Cho dãy số (u_n) có $u_1 = 1$, $u_{n+1} = 3u_n$. Tính u_n

* Phân tích để tìm lời giải

- Từ giả thiết $u_{n+1} = 3.u_n$, ta có dãy số (u_n) là một cấp số nhân

- Dựa vào tính chất cấp số nhân. Tính được u_n.

* Lời giải.

Từ giả thiết $u_{n+1} = 3.u_n$, ta có dãy số (u_n) là một cấp số nhân có $u_1 = 1$ và công bội $q = 3$.

Vậy $u_n = u_1.q^{n-1} = 1.3^{n-1} = 3^{n-1}$.

Ví dụ 4: Cho dãy số (u_n) có: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + 3^n \end{cases}$ Tính u_n.

* Phân tích để tìm lời giải.

- Từ giả thiết: $u_n = u_{n-1} + 3^n \rightarrow u_n - u_{n-1} = 3^n$

- Nếu đặt: $u_n - u_{n-1} = v_{n-1}$ thì (v_n) là 1 cấp số nhân. Tính được v_n ta sẽ tính được u_n.

* Lời giải.

Từ giả thiết: $u_n = u_{n-1} + 3^n \to u_n - u_{n-1} = 3^n$

Áp dụng công thức trên ta có: $u_n - u_{n-1} = 3^n$

$$u_{n-1} - u_{n-2} = 3^{n-1}$$

$$\dots$$

$$u_2 - u_1 = 3^2$$

$$u_n - u_1 = 3^n + 3^{n-1} + \dots + 3^2$$

$$= 3^2\frac{3^{n-1}-1}{2} = \frac{3^{n+1}-9}{2}$$

Vậy $u_n = \frac{3^{n+1}-9}{2} + 1$

2.3 <u>Dạng 3</u>: *Tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n) biết: $u_1 = a_1$ và $u_n = a.u_{n-1} + b$ với $n \in N^*$ và $n > 1$*

a) Phân tích tìm lời giải

- Giả sử $u_n + x = a.(u_{n-1} + x) \to u_n = a.u_{n-1} + ax - x$

- Ta có: $x(a - 1) = b \to x = \frac{b}{a-1}$ (Nếu a = 1 trở về cấp số cộng)

b) Lời giải.

Từ giả thiết: $u_n = a.u_{n-1} + b \to u_n + x = a.(u_{n-1} + x)$

Đặt: $u_n + x = v_n \to (v_n)$ là cấp số nhân có: $v_1 = a_1 + x$ và $q = a$

$\to v_n = v_1.q^{n-1}$

Vậy: $u_n = v_n - x = \left(a_1 + \frac{b}{a-1}\right).a^{n-1} - \frac{b}{a-1}$

c) Ví dụ.

Ví dụ 5: Cho dãy số (u_n) có: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 4u_{n-1} + 5 \end{cases}$ Tính u_n

* Phân tích:

Ta có: a = 4; b = 5 $\to x = \frac{5}{4-1} = \frac{5}{3}$

* Lời giải:

Từ giả thiết: $u_n = 4u_{n-1} + 5 \rightarrow u_n + \frac{5}{3} = 4(u_{n-1} + \frac{5}{3})$

Đặt: $u_n + \frac{5}{3} = v_n \rightarrow (v_n)$ là cấp số nhân có: $v_1 = \frac{5}{3} + 1 = \frac{8}{3}$ và $q = 4$

$$\rightarrow v_n = v_1.\,q^{n-1} = \frac{8}{3}.4^{n-1} = \frac{2}{3}.4^n$$

Vậy: $u_n = \frac{2}{3}.4^n - \frac{5}{3} = \frac{1}{3}(\,2^{2n+1} - 5)$.

2.4 <u>Dạng 4</u>: Tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n) biết $u_1 = a_1$; $u_2 = a_2$ và $u_n = a.u_{n-1} + b.u_{n-2}$ với $n \in N^*$ và $n > 2$

a) Phân tích tìm lời giải

- Giả sử $u_n + x.u_{n-1} = y.(\,u_{n-1} + x.u_{n-2}\,) \rightarrow u_n = (\,-x + y).u_{n-1} + xy.u_{n-2}$

- Ta có: $\begin{cases} -x + y = a \\ xy = b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x + y = a \\ -xy = -b \end{cases}$

Nên -x và y là nghiệm của phương trình: $t^2 - at - b = 0$. Giả sử phương trình có nghiệm là t_1 và $t_2 \rightarrow x = -t_1$ và $y = t_2$

- Do đó: $u_n - t_1 = t_2.(\,u_{n-1} - t_1\,)$. Đặt $u_n - t_1 = v_n \rightarrow (v_n)$ là cấp số nhân có: $v_1 = a_1 - t_1$ và $q = t_2 \rightarrow v_n = v_1.\,q^{n-1}$

- Vậy: $u_n = t_1 + v_n = t_1 + (\,a_1 - t_1).t_2^{\,n-1}$

b) Lời giải.

Từ giả thiết: $u_n = a.u_{n-1} + b.u_{n-2} \rightarrow u_n - t_1 = t_2.(\,u_{n-1} - t_1\,)$.

Đặt $u_n - t_1 = v_n \rightarrow (v_n)$ là cấp số nhân có: $v_1 = a_1 - t_1$ và $q = t_2 \rightarrow v_n = v_1.\,q^{n-1}$

Vậy: $u_n = t_1 + v_n = t_1 + (\,a_1 - t_1).t_2^{\,n-1}$

c) Ví dụ:

Ví dụ 6: Cho dãy số (u_n) có: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = 3 \\ u_n = 4u_{n-1} - 3u_{n-2} \end{cases}$ (với $n \in N^*$ và $n > 2$). Tính u_n

+ Phân tích tìm lời giải.

Ta có: $a = 4$; $b = -3$

Giải phương trình: $t^2 - 4t + 3 = 0$ $t_1 = 1$ và $t_2 = 3 \rightarrow x = -1$ và $y = 3$ (hoặc $x = -3$ và $y = 1$)

+ Lời giải.

Từ giả thiết: $u_n = 4u_{n-1} - 3u_{n-2} \rightarrow u_n - u_{n-1} = 3(u_{n-1} - u_{n-2})$.

Đặt: $u_n - u_{n-1} = v_{n-1}$. Ta có: $v_n = 3.v_{n-1} \rightarrow (v_n)$ là 1 cấp số nhân có $\begin{cases} v_1 = u_2 - u_1 = 2 \\ q = 3 \end{cases}$

$\rightarrow v_n = v_1.q^{n-1} = 2.3^{n-1}$

Nên: $u_n - u_{n-1} = v_{n-1} = 2.3^{n-2}$

$u_{n-1} - u_{n-2} = v_{n-2} = 2.3^{n-3}$

. . .

$u_2 - u_1 = v_1 = 2.3^0$

$u_n - u_1 = 2(3^0 + 3^1 + ... + 3^{n-2}) = 2.\frac{3^{n-1}-1}{3-1} = 3^{n-1} - 1$

Vậy $u_n = u_1 + 3^{n-1} - 1 = 3^{n-1}$

+ Nhận xét:

Nếu lấy x = -3 và y = 1.

Từ giả thiết: $u_n = 4u_{n-1} - 3u_{n-2} \rightarrow u_n - 3u_{n-1} = 1(u_{n-1} - 3u_{n-2})$. Ta cũng có cách giải tương tự.

2.5 <u>Dạng 5</u>: ***Tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n) biết $u_1 = a_1$; $u_2 = a_2$ và $u_n = a.u_{n-1} + b.u_{n-2} + c$. Với $n \in N^*$ và $n > 2$***

a) Phân tích tìm lời giải

- Giả sử $u_n + x.u_{n-1} = y.(u_{n-1} + x.u_{n-2}) + c \rightarrow u_n = (-x + y).u_{n-1} + xy.u_{n-2} + c$

- Ta có: $\begin{cases} -x + y = a \\ xy = b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x + y = a \\ -xy = -b \end{cases}$

Nên -x và y là nghiệm của phương trình: $t^2 - at - b = 0$. Giả sử phương trình có nghiệm là t_1 và $t_2 \rightarrow x = -t_1$ và $y = t_2$

- Do đó: $u_n - t_1 = t_2.(u_{n-1} - t_1)$. Đặt $u_n - t_1 = v_n \rightarrow (v_n)$ là cấp số nhân có: $v_1 = a_1 - t_1$ và $q = t_2 \rightarrow v_n = v_1.q^{n-1}$

- Nên: $v_n = y.v_{n-1} + c$. Quay về dạng 3 ta tìm ra kết quả.

b) Lời giải.

Từ giả thiết: $u_n = a.u_{n-1} + b.u_{n-2} + c \rightarrow u_n - t_1 = t_2.(u_{n-1} - t_1) + c$

Đặt $u_n - t_1 = v_n \rightarrow (v_n)$ là cấp số nhân có: $v_1 = a_1 - t_1$ và $q = t_2 \rightarrow v_n = v_1.q^{n-1}$

Nên: $v_n = y.v_{n-1} + c \rightarrow x' = \dfrac{c}{y-1}$

Đặt $u_n + x' = w_n \rightarrow (w_n)$ là cấp số nhân có: $\begin{cases} w_1 = u_1 + x' \\ q = y \end{cases}$

$\rightarrow w_n = w_1.q^{n-1} = (u_1 + x').y^{n-1}$

Vậy $u_n = w_n - x'$

c) Ví dụ:

Ví dụ 7: Cho dãy số (u_n) có: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = 3 \\ u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2} + 4 \end{cases}$ (với $n \in N^*$ và $n > 2$).

Tính u_n

+ Phân tích tìm lời giải.

- Ta có a = 3; b = -2

Xét phương trình: : $t^2 - 3t + 2 = 0 \rightarrow t_1 = 1$ và $t_2 = 2 \rightarrow x = -1$ và $y = 2$ (hoặc $x = -2$ và $y = 1$)

+ Lời giải.

Từ giả thiết: $u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2} + 4 \rightarrow u_n - u_{n-1} = 2(u_{n-1} - u_{n-2}) + 4$

Đặt: $u_n - u_{n-1} = v_{n-1}$. Ta có: $v_n = 2.v_{n-1} + 4 \rightarrow (v_n)$ là 1dãy số dạng 3.

Từ giả thiết : $v_n = 2.v_{n-1} + 4$ (có x = 4) $\rightarrow v_n + 4 = 2(v_{n-1} + 4)$.

Đặt $v_n + 4 = w_n \rightarrow$ Dãy số (w_n) là 1 cấp số nhân có $w_1 = v_1 + 4 = 6$, công bội $q = 2$

$\rightarrow w_n = w_1.q^{n-1} = 6.2^{n-1} = 3.2^n = v_n + 4 = u_{n+1} - u_n + 4 \rightarrow u_{n+1} = u_n + 3.2^n - 4$

Nên: $u_n = u_{n-1} + 3.2^{n-1} - 4$

$u_{n-1} = u_{n-2} + 3.2^{n-2} - 4$

. . .

$u_2 = u_1 + 3.2^1 - 4$

$u_n = u_1 + 3(2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1}) - 4(n-1) = 3.2^n - 4n - 1$

Vậy $u_n = 3.2^n - 4n - 1$

3) Bài toán dãy số trong đề thi HSG 12 thành phố Hà Nội từ năm 2008

3.1 Bài 3 phần 2 (Đề thi năm 2008)

Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1}{4n^2-1}$ Thành lập dãy số (s_n) với $s_1 = u_1$, $s_2 = u_1 + u_2$, . . ., $s_n = u_1 + u_2 + . . . + u_n$. Tìm $\lim s_n$

Lời giải.

Ta có: $s_n = \frac{1}{4.1^2-1} + \frac{1}{4.2^2-1} + \cdots + \frac{1}{4.n^2-1}$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2-1} - \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2.2-1} - \frac{1}{2.2+1} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$

$= \frac{1}{2}.\frac{2n}{2n+1}$

Vậy $\lim s_n = \frac{1}{2}$

3.2 Bài 2 phần 2 (Đề thi năm 2009)

Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{P_n}{A_{n+2}^n}$ với $n \in N^*$. Đặt $s_n = u_1 + u_2 + . . . + u_n$. Tìm $\lim s_n$

Lời giải

Ta có : $u_n = \frac{n!.2!}{(n+2)!} = \frac{2}{(n+1)(n+2)} = 2\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$

Nên : $s_n = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{n}{n+2}$

Vậy $\lim s_n = 1$

3.3 Bài 4 (Đề thi năm 2010)

Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{4n+1}{2^n}$. Dãy (s_n) được cho bởi $s_n = u_1 + u_2 + . . . + u_n$. Tìm $\lim s_n$

Lời giải

Ta có : $u_{n+1} - u_{n+2} = \frac{4n+1}{2^{n+2}} = \frac{1}{4}u_n$. Nên $u_n = 4(u_{n+1} - u_{n+2})$

Suy ra: $s_n = 4(u_2 - u_{n+2}) = 4\left(\frac{9}{4} - \frac{4n+9}{2^{n+2}}\right)$

Vậy $\lim s_n = 9$.

3.4 Bài 3 (Đề thi năm 2011)

1) Cho dãy số (u_n) xác định bởi : $u_n = 1$, $u_{n+1} = u_n + n$ với $n \geq 1$. Tìm $\lim\frac{u_n}{u_{n+1}}$

2) Cho dãy số (v_n) xác định bởi : $v_1 = \sqrt{2015}$ và $v_{n+1} = v_n^2 - 2$ với $n \geq 1$. Chứng minh rằng $\lim\frac{v_{n+1}^2}{v_1^2.v_2^2...v_n^2} = 2011$

Lời giải.

1) Ta có: $u_1 = 1$; $u_2 = u_1 + 1$; . . . ; $u_n = u_{n-1} + n - 1$

Cộng các vế của n đẳng thức trên thì $u_n = 1 + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{2+n(n-1)}{2}$

Vậy: $\lim\frac{u_n}{u_{n+1}} = \lim\frac{2+n(n-1)}{2+(n+1)n} = 1$

2) Ta có $v_{k+1} = v_k^2 - 2 \to v_{k+1}^2 - 4 = v_k^2(v_k^2 - 4)$

Áp dụng công thức trên ta được $v_{n+1}^2 - 4 = v_1^2.v_2^2 \dots v_n^2.2011$

Nên $\frac{v_{n+1}^2 - 4}{v_1^2.v_2^2 \dots v_n^2} = 2011$

Ta chứng minh được $\lim v_n = +\infty$

Vậy: $\lim \frac{v_{n+1}^2}{v_1^2.v_2^2 \dots v_n^2} = 2011$

3.5 Bài 5 (Đề thi năm 2012)

Cho dãy số (u_n): $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2u_n - 1} \; (n \epsilon N^*) \end{cases}$

1) Chứng minh (u_n) giảm và bị chặn
2) Tìm u_n

Lời giải

1) + Dùng phương pháp qui nạp chứng minh : $1 < u_n \leq 2$

 + Ta có: $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2}{2u_n - 1} - u_n = \frac{u_n(1 - u_n)}{2u_n - 1} < 0$

 $\to u_{n+1} < u_n$. Vậy (u_n) là dãy số giảm.

2) Dùng phương pháp qui nạp chứng minh $u_n = \frac{2^{2^{n-1}}}{2^{2^{n-1}} - 1}$ (*)

 + Với n = 1. Ta có $u_1 = \frac{2}{1} = 2$ (đúng)

 + Giả sử công thức (*) đúng với $n = k \geq 1$. Tức là $u_k = \frac{2^{2^{k-1}}}{2^{2^{k-1}} - 1}$. ta có :

$$u_{k+1} = \frac{u_k^2}{2u_k - 1} = \frac{\left(\frac{2^{2^{k-1}}}{2^{2^{k-1}} - 1}\right)^2}{\frac{2.2^{2^{k-1}}}{2^{2^{k-1}} - 1} - 1} = \frac{2^{2^k}}{(2^{2^{k-1}} - 1)(2^{2^{k-1}} + 1)} = \frac{2^{2^k}}{2^{2^k} - 1}$$

 Công thức (*) đúng với n = k + 1. Vậy (*) đúng với mọi $n \epsilon N^*$

3.6 Bài 5 (Đề thi năm 2013)

Cho dãy số (u_n) với $u_1 = 2$; $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2014} + \frac{2013}{2014} u_n \; (n \epsilon N^*)$

a) Chứng minh (u_n) tăng
b) Đặt $v_n = \frac{u_n}{u_{n+1} - 1}$. Chứng minh rằng $v_1 + v_2 + \dots + v_n < 2014 \; (n \epsilon N^*)$

Lời giải

a) Chứng minh: $u_n < u_{n+1}$ (dùng qui nạp)

 + Với n = 1. Ta có $u_2 = \frac{4 + 4026}{2014} = \frac{4030}{2014} > 2 = u_1$ (đúng)

 + Giả sử $u_k < u_{k+1}$ với $k \geq 1$, ta có :

 $u_{k+1} < u_{k+2} \leftrightarrow (u_k - u_{k+1})(u_k + u_{k+1} + 2013) < 0 \leftrightarrow u_k < u_{k+1}$ (luôn đúng)

 Vậy (u_n) tăng.

b) + Ta có: $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2}{2014} + \frac{2013}{2014}u_n - u_n = \frac{u_n(u_n-1)}{2014}$

$\rightarrow \frac{u_{n+1}-1-(u_n-1)}{(u_{n+1}-1)(u_n-1)} = \frac{u_n}{2014.(u_{n+1}-1)}$

$\rightarrow v_n = \frac{u_n}{u_{n+1}-1} = 2014\left(\frac{1}{u_n-1} - \frac{1}{u_{n+1}-1}\right)$ (*)

Áp dụng đẳng thức (*), ta có :

$v_1 = 2014(\frac{1}{u_1-1} - \frac{1}{u_2-1})$

$v_2 = 2014(\frac{1}{u_2-1} - \frac{1}{u_3-1})$

. . .

$v_n = 2014(\frac{1}{u_n-1} - \frac{1}{u_{n+1}-1})$

$\rightarrow v_1 + v_2 + ... + v_n = 2014.(1 - \frac{1}{u_{n+1}-1})$ (**)

+ Dùng qui nạp chứng minh được $u_n > 1$ với mọi $n \in N^*$

Từ kết quả (**) ta suy ra ĐPCM

3.7 Bài 5 (Đề thi năm 2014)

Cho dãy số (u_n): $\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = 2u_n + \sqrt{3u_n^2+1} \ (n \in N^*) \end{cases}$

a) Chứng minh $u_{n+2} = 4u_{n+1} - u_n$
b) Chứng minh u_{2015} chia hết cho 5

Lời giải.

a) Từ giả thiết, ta có $(u_{n+1} - 2u_n)^2 = 3u_n^2 + 1$

$\rightarrow u_{n+1}^2 - 4u_{n+1}.u_n + u_n^2 = 1$

Tương tự: $u_{n+2}^2 - 4u_{n+2}.u_{n+1} + u_{n+1}^2 = 1$

Nên u_{n+2} và u_n là nghiệm phương trình: $x^2 - 4.u_{n+1}.x + u_{n+1}^2 - 1 = 0$.

Áp dụng định lí Viét : $u_{n+2} + u_n = 4.u_{n+1}$. Vậy $u_{n+2} = 4.u_{n+1} - u_n$

b) Ta có : $u_{n+2} = 4.u_{n+1} - u_n = 15.u_n - 4.u_{n-1} = 5(3.u_n - u_{n-1}) + u_{n-1}$.

$\rightarrow u_{n+2} \equiv u_{n-1} \ (mod\ 5)$

$\rightarrow u_{2015} \equiv u_2 \ (mod\ 5)$. Mà $u_2 = 15 \vdots 5$.

Vậy $u_{2015} \vdots 5$

3.8 Bài 5 (Đề thi năm 2015)

Cho dãy số (x_n) với $x_1 = 1$; $x_{n+1} = x_n^{2016} + x_n \ (n \in N^*)$

Xét dãy số (y_n) với $y_n = \frac{x_1^{2015}}{x_2} + \frac{x_2^{2015}}{x_3} + \ldots + \frac{x_n^{2015}}{x_{n+1}}$

1) Chứng minh $y_n = 1 - \frac{1}{x_{n+1}}$
2) Tìm $\lim y_n$

Lời giải.

1) Từ giả thiết, ta có : $x_{n+1} = x_n(x_n^{2015} + 1)$

$\rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} = x_n^{2015} + 1$

$\rightarrow \frac{1}{x_n} = \frac{x_n^{2015}}{x_{n+1}} + \frac{1}{x_{n+1}}$

$\rightarrow \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n+1}} = \frac{x_n^{2015}}{x_{n+1}}$ (*)

Áp dụng đẳng thức (*) với n = 1, 2, . . ., n ta được : $y_n = 1 - \frac{1}{x_n}$

2) Ta có $x_n > 1$. Giả sử $\lim x_n = a > 0$

$\rightarrow a = a^{2016} + a \rightarrow a = 0$ (vô lí). $\rightarrow \lim x_n = +\infty$

Vậy: $\lim y_n = \lim(1 - \frac{1}{x_{n+1}}) = 1$.

3.9 **Bài 3 (Đề thi năm 2016)**

Cho dãy số (u_n) với $u_1 = 1$; $u_n = \frac{n}{n-1}u_{n-1} + n$ (với $n \geq 2$)

1) Xác định công thức tính số hạng tổng quát u_n
2) Chứng minh: $u_1 + u_2 + \ldots + u_{2016} < 2016^3$

Lời giải.

1) Ta chứng minh: $u_n = n^2$ (bằng qui nạp)

+ Với n = 1, ta có $u_1 = 1$ (đúng)

+ Giả sử công thức đúng với $n = k \geq 1$. Tức là $u_k = k^2$

Ta có: $u_{k+1} = \frac{k+1}{k}u_k + k + 1 = (K+1).k + k + 1 = (k+1)^2$

Công thức đúng với n = k + 1. Vậy ta có Đpcm

2) Chứng minh: $u_1 + u_2 + \ldots + u_{2016} < 2016^3$

$\leftrightarrow 1^2 + 2^2 + \ldots + 2016^2 < 2016^3$

$\leftrightarrow \frac{2016.(2016+1)(2.2016+1)}{6} < 2016^3$

$\leftrightarrow 2017.4033 < 6.\ 2016^2$ (luôn đúng)

Vậy có Đpcm

4) Một số bài tập áp dụng

Bài 1.

Cho dãy số (u_n) thỏa mãn: $u_1 = 2002$, $u_{n+1} = 2001u_n + 2000$ với $n \in N^*$

a) Hãy biểu diễn số hạng tổng quát u_n qua n

b) Tìm tổng của n số hạng đầu tiên của dãy số đó.

ĐS: a) $u_n = 2003.2001^{n-1} - 1$

b) $S_n = \frac{2003(2001^n - 1)}{2000} - n$

Bài 2.

Tìm số hạng tổng quát của dãy số (a_n) biết: $\begin{cases} a_0 = 4 \\ a_1 = 7 \\ a_k = 3a_{k-1} - 2a_{k-2} \end{cases} \quad (k \in N, k \geq 2)$

ĐS: $a_n = 3.2^n + 1$

Bài 3.

Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_1 = 3$, $u_2 = 7$, $u_n = 6u_{n-1} - u_{n-2}$ ($n \in N$ và $n > 2$)

a) Rút gọn biểu thức: $u_{n+1}^2 - 6u_n u_{n+1} + u_n^2$

b) $\frac{u_n^2}{2}$ có là số chính phương không? Chứng minh

ĐS: a) -8

b) $\frac{u_n^2}{2}$ không là số tự nhiên

Bài 4.

Cho dãy số (x_n) xác định bởi: $x_1 = \sqrt{12}, x_2 = \sqrt{12 + \sqrt{12}}; x_n = \sqrt{12 + \sqrt{12 + ...\sqrt{12}}}$ (n dấu căn). Chứng minh dãy (x_n) hội tụ. Tìm giới hạn đó

ĐS: $\lim u_n = 4$

Bài 5.

Cho dãy số (a_n) xác định bởi: $\begin{cases} a_0 = \cos\alpha (0 < \alpha < \pi) \\ a_n = \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}} (n \in N^*) \end{cases}$

Tìm giới hạn của dãy số A_n và B_n với $A_n = 1 - a_n$ và $B_n = a_1 a_2 \ldots a_n$

ĐS: $\lim A_n = 0$; $\lim B_n = \frac{\sin\alpha}{\alpha}$

Bài 6.

Cho dãy số (u_n) xác định như sau: $u_1 = \sqrt{2}; u_{n+1} = \dfrac{u_n + \sqrt{2} - 1}{(1-\sqrt{2})u_n + 1}$. Tính u_{1993}

Phần III. KẾT LUẬN

1) Kết quả sau khi thực hiên đề tài.

- Sau khi thực hiện đề tài trên ở lớp 11A1, hầu hết các em học sinh trong lớp đã nắm tương đối tốt về các dạng toán tìm số hạng tổng quát của dãy số truy hồi mà số hạng tổng quát được viết dưới dạng biểu thức tuyến tính của một hoặc 2 số hạng đứng trước nó. Kết quả kiểm tra 1 bài sau đợt học tự chọn là tương đối cao.

- Sau đây là đề kiểm tra cuối phần dãy số và đại số tổ hợp:

ĐỀ KIỂM TRA LỚP 11

Môn: Đại số - Thời gian: 90 phút

----------****----------

Bài 1 (3 điểm). Giải các phương trình sau:

1) $23.A_x^4 = 24(A_{x+1}^3 - C_x^{x-4})$

2) $\dfrac{1}{C_4^x} - \dfrac{1}{C_5^x} = \dfrac{1}{C_6^x}$

Bài 2 (2 điểm). Một hộp có 12 viên bi, trong đó có 5 viên bi màu đỏ và 7 viên màu trắng.

1) Lấy ngẫu nhiên cùng một lúc 3 viên bi. Tính xác suất trong 3 viên bi lấy ra có ít nhất 2 viên bi trắng.

2) Lấy ngẫu nhiên 2 lần, mỗi lần 1 viên bi. Tính xác suất để viên bi thứ nhất màu đỏ, viên bi thứ 2 màu trắng.

Bài 3 (4 điểm).

1) Ba số lập thành cấp số nhân có tổng là 93, có thể xem chúng là số hạng thứ nhất, thứ hai và thứ bảy của một cấp số cộng. Tìm ba số đó.

2) Tìm m để phương trình sau có 4 nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng:

$$x^4 - (3m + 5)x^2 + (m + 1)^2 = 0$$

Bài 4 (1 điểm). Cho dãy số (u_n) xác định bởi:

$u_1 = 1$, $u_2 = 3$ và $u_{n+2} = 2.u_{n+1} - u_n + 3$ (với $n \in N^*$). Tính u_{2011}.

- Kết quả như sau:

Kết quả \ Diễn giải		Bài 4	Cả 4 bài	Ghi chú
Loại Giỏi	**Số lượng**	38	37	
	Tỉ lệ %	86,4	84,1	
Loại Khá	**Số lượng**	0	7	
	Tỉ lệ %		15,9	
Loại TB	**Số lượng**	0	0	
	Tỉ lệ %			
Loại Yếu	**Số lượng**	0	0	
	Tỉ lệ %			
Loại Kém	**Số lượng**	6	0	
	Tỉ lệ %	13,6		

- Từ bảng tổng hợp trên ta thấy đại bộ phận học sinh đã nắm tốt kiến thức cơ bản.
- Đặc biệt là bài toán về dãy số đã có gần 90% học sinh giải quyết tốt.
- Từ đây các em có cơ sở để giải quyết các bài toán khác về dãy số

2) Đề xuất và kiến nghị

- Tổ Toán và nhà trường nên tổ chức Họp tổ chuyên môn và ngoại khóa chủ đề Toán liên quan đến một số chuyên đề khó trong đó có chuyên đề về tìm số hạng tổng quát của dãy số dạng truy hồi.

- Việc biên soạn SGK nên chứng minh các định lí trong phạm vi kiến thức phổ thông cho phép, giúp các em học sinh tự tin hơn trong việc áp dụng nó vào giải toán.

Xin trân trọng cảm ơn

XÁC NHẬN CỦA THỦ TRƯỞNG ĐƠN VỊ

Hà Nội, ngày 16 tháng 5 năm 2017
Tôi xin cam đoan đây là sáng kiến kinh nghiệm của mình viết, không sao chép nội dung của người khác .
NGƯỜI VIẾT

Ý KIẾN CỦA HỘI ĐỒNG KHOA HỌC

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

CHỦ TỊCH HỘI ĐỒNG