

MỤC LỤC

MỤC LỤC	1
MỞ ĐẦU	2
1. Lý do chọn đề tài	2
2. Mục đích nghiên cứu.....	2
3. Thời gian nghiên cứu và đối tượng nghiên cứu.....	2
4. Phạm vi nghiên cứu và ứng dụng	2
5. Khảo sát trước khi thực hiện đề tài.....	3
NỘI DUNG ĐỀ TÀI.....	4
1. Một số vấn đề về tự học.	4
1.1. Quan niệm về tự học	4
1.2. Đặc trưng của hoạt động tự học.....	4
2. Vận dụng phương pháp tự học trong dạy học tiết ôn tập của chương. .	4
THỰC NGHIỆM SƯ PHẠM	23
KẾT LUẬN VÀ KHUYẾN NGHỊ.....	28

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Nói tới *phương pháp học thì cốt lõi là phương pháp tự học*, đó là cầu nối giữa học tập và nghiên cứu khoa học. Nếu phát triển cho người học có được kỹ năng, phương pháp, thói quen tự học, biết ứng dụng những điều đã học vào những tình huống mới, biết tự lực phát hiện và giải quyết những vấn đề gặp phải thì sẽ tạo cho họ lòng ham học, khơi dậy tiềm năng vốn có của mỗi người. Học tập Toán không thể không đi theo xu thế đó. Đặc biệt phần tọa độ hóa hình học không gian là phần không thể thiếu trong chương trình toán phổ thông vì nhiệm vụ của nội dung phương pháp tọa trong không gian thuộc môn Hình học không gian là cung cấp những kiến thức cơ bản về Hình học không gian ba chiều một cách có hệ thống và tiếp tục phát triển, phát triển tư duy lôgic, trí tưởng tượng không gian, kỹ năng vận dụng các kiến thức hình học vào giải quyết bài tập bằng phương pháp tọa độ hóa, các hoạt động thực tiễn và vào các môn học khác. Tuy nhiên đây lại là phần tương đối khó đối với học sinh do vậy mà không phải học sinh nào cũng đủ Bước gian để thấu hiểu, ghi nhớ và vận dụng những kiến thức mà giáo viên truyền thụ ở trên lớp. Vì vậy, việc tự học của học sinh là rất quan trọng và cần thiết.

Với lý do trên, tôi quyết định chọn đề tài: ***“Phát triển năng lực tự học cho học sinh qua dạy tiết ôn tập của chương phương pháp tọa độ trong không gian”***.

2. Mục đích nghiên cứu

Phát triển năng lực tự học cho học sinh lớp 12 qua giảng dạy nội dung “phương pháp tọa độ trong không gian” trong chương trình Hình học lớp 12 bản cơ bản hướng tới hình thành thói quen học suốt đời.

3. Thời gian nghiên cứu và đối tượng nghiên cứu

- **Thời gian nghiên cứu:** Quá trình dạy học phần phương pháp tọa độ trong không gian ở trường Trung học phổ thông Hoài Đức A.

- **Đối tượng nghiên cứu:** xây dựng phương án dạy học nội dung phương pháp tọa độ trong không gian nhằm phát triển năng lực tự học của học sinh lớp 12.

4. Phạm vi nghiên cứu và ứng dụng

- Nghiên cứu các bài tập Hình học không gian của chương “Phương pháp tọa độ trong không gian” trong SGK và SBT Hình học 12 Bản cơ bản và các sách

tham khảo.

- Nội dung đề tài có thể giúp giáo viên có thêm tư liệu phục vụ việc giảng dạy chương “Phương pháp tọa độ trong không gian” trong chương trình Hình học lớp 12 Ban cơ bản.

- Giúp học sinh rèn luyện kỹ năng giải bài toán Hình học tọa độ trong không gian góp phần nâng cao chất lượng dạy học Toán trong trường phổ thông.

5. Khảo sát trước khi thực hiện đề tài

Lớp	Số số	Giỏi		Khá		Trung bình		Yếu	
		SL	Tỷ lệ	SL	Tỷ lệ	SL	Tỷ lệ	SL	Tỷ lệ
Thực nghiệm	42	11	26,2%	18	42,9%	12	28,6%	1	2,4 %
Đối chứng	40	10	25%	16	40%	9	22,5%	5	12,5 %

NỘI DUNG ĐỀ TÀI

Phát triển năng lực tự học cho học sinh qua dạy tiết ôn tập của chương phương pháp tọa độ trong không gian.

1. Một số vấn đề về tự học.

1.1. Quan niệm về tự học

Trong lịch sử giáo dục, vấn đề tự học được quan tâm từ rất sớm, được đề cập và nhìn nhận theo nhiều cách tiếp cận khác nhau.

Tự học (self-learning) là quá trình người học nỗ lực chiếm lĩnh tri thức bằng hành động của chính mình, hướng tới mục đích nhất định.

Theo từ điển: “Tự học là quá trình chủ thể nhận thức tự mình hoạt động lĩnh hội tri thức và phát triển kỹ năng thực hành, không có sự hướng dẫn trực tiếp của giáo viên và sự quản lý trực tiếp của cơ sở giáo dục đào tạo”.

Theo tác giả Hồ Chí Minh: tự học là học một cách tự động, tức là: học tập một cách hoàn toàn tự giác, tự chủ, không đợi ai nhắc nhở, không chờ ai giao nhiệm vụ mà tự mình chủ động vạch kế hoạch một cách tự giác, tự mình làm chủ Bước gian để học và tự mình kiểm tra, đánh giá việc học của mình.

Trong trường Phổ thông, tự học được hiểu là quá trình chủ động, tự giác của người học nhằm nắm bắt các tri thức, kỹ năng, kỹ xảo dưới sự hướng dẫn, hỗ trợ của giáo viên.

1.2. Đặc trưng của hoạt động tự học

Hoạt động tự học có nhiều đặc trưng, tuy nhiên có thể kể tới bốn đặc trưng cơ bản sau:

- Tự học có tính độc lập cao.
- Đối với tự học, động cơ có vai trò quan trọng.
- Trong hoạt động tự học thì khả năng lựa chọn về nội dung, phương pháp và hình thức tổ chức học là cao và rất rộng rãi.
- Hay có thể nói cách tự học là của riêng của mỗi người.

một số phương pháp xa lạ vào quá trình dạy học. Vấn đề là ở chỗ cần kế thừa, phát triển những mặt tích cực của phương pháp dạy học hiện có, đồng Bước phải học hỏi, vận dụng một số phương pháp dạy học mới một cách linh hoạt nhằm phát huy tính tích cực, chủ động sáng tạo của học sinh trong học tập, phù hợp với hoàn cảnh điều kiện dạy và học cụ thể.

2. Vận dụng phương pháp tự học trong dạy học tiết ôn tập của chương.

Tiết ôn tập là một tiết rất quan trọng đối với chương đó. Yêu cầu học sinh

phải tổng hợp được kiến thức của chương, hệ thống được hết các dạng bài tập và phương pháp giải chúng. Nhằm củng cố, khắc sâu kiến thức học sinh đã được học, các em thấy được mối liên hệ mật thiết giữa các nội dung. Qua đó các em vận dụng sáng tạo vào việc giải quyết mà giáo viên yêu cầu hoặc một số vấn đề trước đó chưa làm được. Vì vậy giáo viên cần tổ chức hoạt động dạy học, phân công nhiệm vụ, tạo điều kiện cho các em bộc lộ khả năng và phát triển tư duy sáng tạo. Học sinh biết cách biến cái đọc được trong sách vở, kiến thức của thầy, của bạn thành kiến thức của mình. Do vậy, cần phát huy tính tự giác, huy động mọi khả năng của mình, đặc biệt là tận dụng thời gian các em tự học ở nhà để hoàn thành nhiệm vụ.

Nội dung dạy học bài ôn tập chương chia làm 3 giai đoạn:

Giai đoạn làm việc chung cả lớp:

- a) Giáo viên giao đề tài, nhiệm vụ.
- b) Tổ chức chia nhóm: Tùy mức độ công việc mà chia nhóm nhiều hay ít thành viên. Trong mỗi nhóm có đủ các đối tượng học sinh: Giỏi, khá, trung bình. Mỗi nhóm tự cử ra một học sinh đảm nhiệm làm nhóm trưởng, một học sinh làm thư kí để ghi chép.
- c) Giao nhiệm vụ cho nhóm và hướng dẫn cách làm việc theo nhóm, đưa ra các chỉ dẫn cần thiết để phù hợp trình độ nhận thức của học sinh.

Giai đoạn làm việc nhóm:

Trong nhóm tự phân công công việc, từng cá nhân làm việc độc lập, trao đổi ý kiến, thảo luận nhóm đi đến thống nhất. Thư kí ghi *biên bản làm việc nhóm* (xem phụ lục 1), cử đại diện trình bày trước lớp và giáo viên nhận xét.

Giai đoạn các nhóm thảo luận và giáo viên tổng kết trước lớp:

Các nhóm lần lượt lên báo cáo kết quả trước lớp, thảo luận chung để đưa ra kết quả tổng hợp. Giáo viên tổng kết, đánh giá kết quả của từng nhóm thông qua *phiếu đánh giá làm việc nhóm* (phụ lục 2), các thành viên trong nhóm tự đánh giá kết quả làm việc của mình và của bạn thông qua *phiếu tự đánh giá tham gia làm việc nhóm* (phụ lục 3).

Để công việc đạt hiệu quả cao thì giáo viên phải có sự chuẩn bị rất kỹ lưỡng, phân công nhiệm vụ rõ ràng, cho thời hạn hoàn thành và nộp báo cáo. Khâu cuối cùng là tổng kết, khen thưởng khích lệ nhóm hoàn thành tốt. Rút kinh nghiệm cho các nhóm chưa tốt.

Cụ thể công việc giáo viên giao nhiệm vụ học tập:

- Nhóm 1: Tổng hợp lý thuyết và các dạng bài tập về phương trình mặt cầu.
- Nhóm 2: Tổng hợp lý thuyết và các dạng bài tập về phương trình mặt phẳng.

– Nhóm 3: Tổng hợp lý thuyết và các dạng bài tập về phương trình đường thẳng. Các dạng bài tập về góc và khoảng cách.

– Nhóm 4: Vận dụng phương pháp tọa độ để giải các bài tập hình học không gian.

Sau đây là kết quả báo cáo của các nhóm:

I/ Tọa độ trong không gian

Cho hai vectơ $\vec{u} = (a_1; b_1; c_1), \vec{v} = (a_2; b_2; c_2)$:

1. Cộng, trừ vectơ: $\vec{u} \pm \vec{v} = (a_1 \pm a_2; b_1 \pm b_2; c_1 \pm c_2)$.
2. Nhân vectơ với một số thực: $k \cdot \vec{u} = (ka_1; kb_1; kc_1)$.
3. Tích vô hướng của hai vectơ: $\vec{u} \cdot \vec{v} = a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 + c_1 \cdot c_2$.
4. Tích có hướng của hai vectơ: $[\vec{u}, \vec{v}] = (b_1 c_2 - b_2 c_1; c_1 a_2 - c_2 a_1; a_1 b_2 - a_2 b_1)$.
5. Độ dài vectơ: $|\vec{u}| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}$.

$$6. \text{ Hai vectơ bằng nhau } \vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \\ c_1 = c_3 \end{cases}$$

$$7. \text{ Góc giữa hai vectơ: } \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

$$8. \text{ Hai vectơ vuông góc: } \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 + c_1 \cdot c_2 = 0.$$

$$9. \text{ Hai vectơ } \vec{u} \text{ và } \vec{v} \text{ cùng phương } \Leftrightarrow \vec{u} = k \cdot \vec{v} \Leftrightarrow [\vec{u}, \vec{v}] = 0 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

(với $a_2, b_2, c_2 \neq 0$).

$$10. \text{ Ba vectơ } \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \text{ đồng phẳng } \Leftrightarrow [\vec{u}, \vec{v}] \cdot \vec{w} = 0.$$

$$11. \text{ Diện tích tam giác: } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \left| [\vec{AB}, \vec{AC}] \right|$$

$$12. \text{ Thể tích tứ diện } ABCD: V_{ABCD} = \frac{1}{6} \left| [\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AD} \right|.$$

$$13. \text{ Thể tích khối hộp } ABCD.A'B'C'D': V_{ABCD.A'B'C'D'} = \left| [\vec{AB}, \vec{AD}] \cdot \vec{AA'} \right|.$$

$$14. I \text{ là trung điểm đoạn thẳng } AB \text{ có tọa độ } I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right).$$

15. G là trọng tâm tam giác ABC có tọa độ

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right).$$

16. Tọa độ vector: $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.

II/ Phương trình mặt cầu

1. Phương trình mặt cầu đi qua $M_o(x_o; y_o; z_o)$ và có bán kính R là

$$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 + (z - z_o)^2 = R^2.$$

2. Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$, với điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ là phương trình mặt cầu tâm $I(-a; -b; -c)$, bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

3. Các dạng bài tập về phương trình mặt cầu

1. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(0; -1; 3)$ và bán kính bằng 8.

Đáp số: $x^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 64$.

2. Viết phương trình mặt cầu (S) có đường kính AB , với $A(-2; 3; 1)$, $B(0; -3; 3)$

Đáp số: $(x + 1)^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 44$.

3. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(3; -2; 4)$ và đi qua điểm $A(7; 2; 1)$

Đáp số: $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 4)^2 = 41$.

4. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(3; -4; 2)$ và tiếp xúc với mp(Oxy).

Đáp số: $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 + (z - 2)^2 = 4$.

5. Viết phương trình mặt cầu đi qua hai điểm $A(3; -1; 2)$, $B(1; 1; -2)$ và có tâm thuộc trục Oz.

Giả sử tâm mặt cầu (S) là I , vì I thuộc Oz nên $I(0; 0; c)$.

Vì $A, B \in (S)$ nên $IA = IB$. Ta có:

$$\sqrt{(3-0)^2 + (-1-0)^2 + (2-c)^2} = \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2 + (-2-c)^2}$$

$$\Leftrightarrow c = 1.$$

Suy ra điểm $I(0; 0; 1)$, bán kính $R = IA = \sqrt{11}$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) : $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 11$

6. Viết phương trình mặt cầu (S) đi qua hai điểm $M(2; 1; -3)$, $N(-3; -2; 1)$ và

có tâm thuộc đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{2}$.

Giải. Giả sử tâm mặt cầu (S) là I , vì I thuộc d nên $I(1+2t; -1-t; 2t)$.

$M, N \in (S)$ nên $IM = IN$ hay

$$\sqrt{(2t-1)^2 + (-t-2)^2 + (2t+3)^2} = \sqrt{(2t+4)^2 + (-t+1)^2 + (2t-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow 2t = 4 \Leftrightarrow t = 2.$$

Suy ra điểm $I(5;-3;4)$, bán kính $R = IA = \sqrt{74}$.

Vậy phương trình mặt cầu $(S): (x-5)^2 + (y+3)^2 + (z-4)^2 = 74$.

7. Viết phương trình mặt cầu đi qua các điểm $A(1;0;0), B(0;1;0), C(0;0;1)$ và có tâm I nằm trên mặt phẳng $(\alpha): x + y + z - 3 = 0$.

Giải. Giả sử tâm mặt cầu (S) là I , vì I thuộc (α) nên $a + b + c - 3 = 0$. (1)

Vì $A, B, C \in (S)$ nên $IA = IB = IC$ hay $IA^2 = IB^2 = IC^2$, do đó:

$$(a-1)^2 + b^2 + c^2 = a^2 + (b-1)^2 + c^2 = a^2 + b^2 + (c-1)^2$$
$$\Leftrightarrow a = b = c$$

Suy ra $a = b = c = 1$. Vậy $I(1;1;1)$, $R = \sqrt{2}$.

Vậy phương trình mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 2$.

Bài tập tự luyện

8. a) Viết phương trình mặt cầu đi qua $A(1;2;-4), B(1;-3;1), C(2;2;3)$ và có tâm thuộc mặt phẳng (Oyz) .

b) Viết phương trình mặt cầu đi qua các điểm $A(1;0;0), B(0;1;0), C(0;0;1)$ và có tâm I nằm trên mặt phẳng $(\alpha): x + y + z - 3 = 0$.

9. Viết phương trình mặt cầu đi qua $A(-3;6;1), B(2;3;-3), C(-6;2;0)$ và có tâm thuộc mặt phẳng $(\alpha): 2x + y - z - 3 = 0$.

10. Viết phương trình mặt cầu đi qua $A(1;1;1), B(1;2;1), C(1;1;2), D(2;2;1)$.

11. Viết phương trình mặt cầu có tâm $I(-2;1;1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (α) có phương trình $x + 2y - 2z + 5 = 0$. Tìm tọa độ tiếp điểm.

12. Cho bốn điểm $A(3;-2;-2), B(3;2;0), C(0;2;1), D(-1;1;2)$. Viết phương trình mặt cầu tâm A , tiếp xúc với mặt phẳng (BCD) .

13. Cho đường thẳng $d: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2}$ và hai mặt phẳng

$(P_1): x + y - 2z + 5 = 0$ và $(P_2): 2x - y + z + 2 = 0$.

Viết phương trình mặt cầu có tâm I thuộc đường thẳng d và tiếp xúc với cả hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) .

14. Cho đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng

$(\alpha): x + y + z + 1 = 0; (\beta): x - y + z - 1 = 0$. và cho hai mặt phẳng

$(P): x + 2y + 2z + 3 = 0; (Q): x + 2y + 2z + 7 = 0$. Viết phương trình mặt cầu có tâm I thuộc d và tiếp xúc với cả hai mặt phẳng (P) và (Q) .

15. Viết phương trình mặt cầu tâm $I(1;2;1)$ và tiếp xúc với đường thẳng

$$d: \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-2}.$$

16. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(-4;1;1)$ và cắt mặt phẳng (α) có phương trình $x+2y-2z+1=0$ theo giao tuyến là đường tròn có bán kính $r=2\sqrt{2}$.

17. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;3)$ và cắt đường thẳng

$$d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{2} \text{ tại hai điểm } A, B \text{ sao cho tam giác } IAB \text{ vuông.}$$

18. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(2;3;-1)$ và cắt đường thẳng

$$d: \frac{x+3}{2} = \frac{y+7}{1} = \frac{z+11}{-2} \text{ tại } A \text{ và } B \text{ sao cho } AB=16.$$

19. Cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-7}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-9}{-1}, d_2: \frac{x-3}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$. Viết phương trình mặt cầu nhận đoạn vuông góc chung của d_1 và d_2 làm đường kính.

20. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $S(3;2;4), A(1;2;3), C(3;0;3)$. Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

III/ Dạng bài tập viết phương trình mặt phẳng

Xác định một điểm và một vtpt.

Hoặc gọi phương trình mặt phẳng dạng $Ax + By + Cz + D = 0$ rồi dựa vào giả thiết tìm A, B, C, D .

Vậy khi nào sử dụng cách 1, khi nào sử dụng cách 2 thì phân biệt các dạng đề bài sau:

Dạng 1. Viết pt mp đi qua $A(x_o; y_o; z_o)$ và có vtpt $\vec{n} = (A; B; C)$

$$A(x - x_o) + B(y - y_o) + C(z - z_o) = 0.$$

Dạng 2. Viết ptmp (P) đi qua $A(x_o; y_o; z_o)$ và song song với mp (Q)

- Từ ptmp $(Q) \Rightarrow \text{vtpt } \vec{n}_Q = (A; B; C)$

- Vì (P) song song với $(Q) \Rightarrow \text{vtpt } \vec{n}_P = \vec{n}_Q = (A; B; C).$

- Ptmp (P) đi qua A và có vtpt $\vec{n}_P$ là:

$$A(x - x_o) + B(y - y_o) + C(z - z_o) = 0.$$

Dạng 3. Viết ptmp (P) đi qua $A(x_o; y_o; z_o)$ và vuông góc với đường thẳng d

- Từ phương trình đường thẳng $d \Rightarrow \text{vtcp } \vec{u}_d = (A; B; C)$

- Vì (P) vuông góc với $d \Rightarrow$ Chọn vtpt của (P) là $\vec{n}_P = \vec{u}_d = (A; B; C)$
 $\Rightarrow$ Viết ptmp (P) đi qua A và có vtpt $\vec{n}_P$.

Dạng 4. Viết ptmp (P) đi qua A và vuông góc $(Q), (R)$.

- Từ ptmp $(Q), (R) \Rightarrow$ vtpt $\vec{n}_Q$; vtpt $\vec{n}_R$
- Vì $(P) \perp (Q)$ và $(P) \perp (R) \Rightarrow$ vtpt $\vec{n}_P \perp \vec{n}_Q$ và $\vec{n}_P \perp \vec{n}_R$
 $\Rightarrow$ Chọn $\vec{n}_P = [\vec{n}_Q, \vec{n}_R]$
- Vậy ptmp (P) đi qua A và có vtpt $\vec{n}_P = [\vec{n}_Q, \vec{n}_R]$.

Dạng 5. Viết ptmp (P) đi qua 3 điểm A, B, C không thẳng hàng

- Tính $\vec{AB}, \vec{AC}$ và $\vec{a} = [\vec{AB}, \vec{AC}]$
- Ptmp (P) đi qua A và có VTPT $\vec{n}_P = \vec{a} = [\vec{AB}, \vec{AC}]$

Dạng 6. Viết ptmp (P) đi qua A, B và vuông góc với mp (Q)

- Tính $\vec{AB}$, vtpt $\vec{n}_Q$ và tính $[\vec{AB}, \vec{n}_Q]$
- Vì $A, B \in (P); (Q) \perp (P)$ nên chọn $\vec{n}_P = [\vec{AB}, \vec{n}_Q]$
- Viết ptmp (P) .

Dạng 7. Viết ptmp (P) đi qua A , vuông góc với (Q) và song song với đường thẳng d .

- Tính vtpt $\vec{n}_Q$ của mp (Q) ; vtcp $\vec{u}_d$ của đường thẳng d .
- Tính $[\vec{u}_d, \vec{n}_Q]$
- Vì $(P) \perp (Q)$ và (P) song song với d nên vtpt của (P) là: $\vec{n}_P = [\vec{u}_d, \vec{n}_Q]$
- Từ đó viết được ptmp (P) .

Dạng 8. Viết ptmp (P) là trung trực của đoạn AB .

- Tìm trung điểm I của đoạn AB và tính $\vec{AB}$
- Mp (P) đi qua I và nhận $\vec{AB}$ làm vtpt.

Dạng 9. Viết ptmp (P) chứa d và đi qua A

- Tính vtcp $\vec{u}_d$ của đường thẳng d và tìm điểm $M \in d$
- Tính $\vec{AM}$ và $[\vec{u}_d, \vec{AM}]$
- Mp (P) đi qua A và có vtpt $\vec{n}_P = [\vec{u}_d, \vec{AM}]$.

Dạng 10. Viết ptmp (P) chứa đường thẳng d và song song với đường thẳng Δ

- Từ ptđt $d \Rightarrow$ vtcp của đường thẳng d là: $\vec{u}_d$ và điểm $M \in d$

- Từ $\Delta \Rightarrow$ vtcp của đường thẳng Δ là $\vec{u}_\Delta$ và tính $[\vec{u}_d, \vec{u}_\Delta]$
- Mp(P) đi qua M và có vtpt $\vec{n} = [\vec{u}_d, \vec{u}_\Delta]$.

Dạng 11. Viết ptmp(P) chứa đường thẳng d và vuông góc với mp(Q)

- Từ (d) vtcp $\vec{u}_d$ và điểm $M \in d$.
- Từ (Q) $\Rightarrow$ vtpt $\vec{n}_Q$ và tính $[\vec{u}_d, \vec{n}_Q]$
- Mp(P) đi qua M và có vtpt $\vec{n} = [\vec{u}_d, \vec{n}_Q]$.

Dạng 12. Viết ptmp (P) // với (Q): $Ax + By + Cz + D = 0$ và $d(A, (P)) = h$

- Vì (P) // (Q) nên ptmp (P) có dạng $Ax + By + Cz + D' = 0$ (với $D \neq D'$).
- Vì $d(A, (P)) = h$ nên thay vào ta tìm được D'
- Thay D' ta có ptmp (P) cần tìm.

Dạng 13. Viết ptmp(P) chứa đường thẳng (d) và $d(A, (P)) = h$

- Gọi vtpt của mp (P) là $\vec{n}_P = (A; B; C)$ với điều kiện là $A^2 + B^2 + C^2 > 0$
- Từ ptđt $d \Rightarrow$ vtcp $\vec{u}_d$ và điểm $M(x_0; y_0; z_0) \in d$.
- Vì d nằm trong (P) $\Rightarrow \vec{u}_d \cdot \vec{n}_P = 0$ (1)

- Ptmp(P) đi qua M là: $A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$
- $d(A, (P)) = h$ (2)

- Giải (1) và (2) ta tìm được A, B theo C từ đó chọn A, B, C đúng tỉ lệ, ta viết được ptmp(P).

Dạng 14. Viết ptmp(P) chứa đường thẳng (d) và hợp với mp(Q) một góc $\alpha \neq 90^\circ$

- Gọi vtpt của mp(P) là $\vec{n}_P = (A; B; C)$ với điều kiện là $A^2 + B^2 + C^2 > 0$
- Từ ptđt $d \Rightarrow$ vtcp $\vec{u}_d$ và điểm $M(x_0; y_0; z_0) \in d$.
- Vì $d \subset (P) \Rightarrow \vec{u}_d \cdot \vec{n}_P = 0$ (1)

- Tính $\cos((P), (Q))$. (2)

- Từ (1) và (2) ta tìm được A, B theo C từ đó chọn A, B, C đúng tỉ lệ, ta viết được ptmp(P).

Dạng 15. Viết ptmp (P) chứa đường thẳng d và hợp với đường thẳng (Δ) góc $\alpha \neq 90^\circ$

- Gọi vtpt của mp(P) là $\vec{n}_P = (A; B; C)$ với điều kiện là $A^2 + B^2 + C^2 > 0$
- Từ $d \Rightarrow$ vtcp $\vec{u}_d$ và điểm $M(x_0; y_0; z_0) \in d$.
- Vì $d \subset (P) \Rightarrow \vec{u}_d \cdot \vec{n}_P = 0$ (1)

- Tính $\sin((P), (\Delta))$. (2)

- Từ hệ (1) và (2) tìm được A, B theo C từ đó chọn A, B, C đúng tỉ lệ, ta viết được ptmp(P).

Dạng 16. Cho điểm A và đường thẳng d, viết ptmp(P) chứa d sao cho $d(A, (P))$ là lớn nhất

- Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của A lên d.
- Ta có $d(A, (P)) = AK \leq AH$ (tính chất đường vuông góc và đường xiên).

Do đó $d(A, (P))_{\max} \Leftrightarrow AK = AH \Leftrightarrow K \equiv H$.

- Viết ptmp(P) đi qua H và nhận $\overleftrightarrow{AH}$ làm vtpt.

Dạng 17. Viết pt mp(P) // với (Q): $Ax + By + Cz + D = 0$ và tiếp xúc với mặt cầu (S)

- Xác định tâm I, bán kính R của mặt cầu (S).
- Vì (P) // (Q) nên (P) có dạng: $Ax + By + Cz + D' = 0$, trong đó $D' \neq D$.
- Mà (P) tiếp xúc với (S) nên $d(I, (P)) = R \Rightarrow$ tìm được D' .
- Từ đó ta có ptmp (P) cần tìm.

Dạng 18. Viết ptmp(P) //(Q): $Ax + By + Cz + D = 0$ và cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) có bán kính r (hoặc diện tích, chu vi cho trước).

- Xác định tâm I, bán kính R của mặt cầu (S).
- Chu vi đường tròn $C = 2\pi r$ và diện tích $S = \pi r^2$ tính r.
- $d(I, (P)) = \sqrt{R^2 - r^2}$. (1)
- Vì (P) //(Q) nên (P) có dạng: $Ax + By + Cz + D' = 0$.
- Suy ra $d(I, (P))$. (2)
- Giải hệ (1), (2) tìm được $D' \Rightarrow$ viết được ptmp(P).

Dạng 19. Viết ptmp(P) chứa đường thẳng (d) và tiếp xúc với mặt cầu (S)

- Xác định tâm I, bán kính R của mặt cầu (S).
- Gọi vtpt của mp(P) là $\vec{n_P} = (A; B; C)$ với điều kiện $A^2 + B^2 + C^2 > 0$
- Từ d $\Rightarrow$ vtcp $\vec{u_d}$ và điểm $M \in (d)$
- $d \subset (P) \Rightarrow \vec{u_d} \cdot \vec{n_P} = 0$ (1)
- Mà (P) tiếp xúc với (S) nên $d(I, (P)) = R$ (2)
- Giải hệ (1) và (2) tìm được A, B theo C $\Rightarrow$ Ptmp (P).

Dạng 20. Viết ptmp(P) chứa đường thẳng (d) và cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) có bán kính r (hoặc diện tích, chu vi cho trước)

- Xác định tâm I, bán kính R của mặt cầu (S).

- Chu vi đường tròn $C = 2\pi r$ và diện tích $S = \pi r^2$ tính r .
- Vì $d \subset (P) \Rightarrow \vec{u}_d \cdot \vec{n}_P = 0$ (1)
- Gọi vtpt của mp(P) là $\vec{n}_P = (A; B; C)$ với điều kiện là $A^2 + B^2 + C^2 > 0$

chọn M trên đường thẳng d .

Ptmp(P) đi qua M có dạng: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

- Vì (P) cắt (S) theo đường tròn bán kính r nên $d(I, (P)) = r$ (2)
- Giải hệ (1) và (2) tìm được A, B theo $C \Rightarrow$ ptmp(P).

Dạng 21. Viết ptmp(P) chứa d và cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) có bán kính nhỏ nhất (áp dụng trường hợp d cắt (S) tại 2 điểm).

- Xác định tâm I , bán kính R của mặt cầu (S).
- Bán kính $r = \sqrt{R^2 - d^2}$ với d là khoảng cách từ I đến mp(P). Bán kính r nhỏ nhất khi và chỉ khi d lớn nhất.
- Gọi H là hình chiếu của I lên d , K là hình chiếu của I lên (P)
- Ta có $d(I, (P)) = IK \leq IH$ (tính chất đường vuông góc và đường xiên). Do đó $d(I, (P)) \max \Leftrightarrow AK = AH \Leftrightarrow K \equiv H$.
- Mp(P) đi qua H và nhận $\vec{IH}$ làm vtpt.

IV/ Phương trình đường thẳng

Có 2 loại phương trình đường thẳng: Phương trình tham số và phương trình chính tắc.

Dạng 1. Viết ptđt (d) qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và có vtcp $\vec{u}(a; b; c)$

Phương pháp: Phương trình tham số của đường thẳng d là

$$(d): \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \text{ với } t \in \mathbb{R}$$

* **Chú ý.** Nếu a, b, c khác 0 thì d có phương trình chính tắc là:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

* **Chú ý.** Đây là bài toán cơ bản. Về nguyên tắc muốn viết phương trình đường thẳng d thì cần phải biết 2 yếu tố đó là tọa độ một điểm thuộc d và tọa độ vtcp của d .

Dạng 2. Viết ptđt d đi qua 2 điểm A, B

- Tính $\vec{AB}$.
- Viết ptđt đi qua A , và nhận $\vec{AB}$ làm vtcp.

Dạng 3. Viết ptđt (d) đi qua A và song song với đường thẳng Δ

- Từ ptđt $\Delta \Rightarrow$ vtcp của đường thẳng Δ là: $\vec{u}_{\Delta}$

- Viết ptđt d đi qua A và nhận $\vec{u}_{\Delta}$ làm vtcp.

Dạng 4. Viết ptđt d đi qua A và vuông góc với mp(P)

- Tìm vtpt của mp(P) là $\vec{n}_P$

- Ptđt d đi qua A và có vtcp $\vec{u}_d = \vec{n}_P$

Dạng 5. Viết ptđt d đi qua A và vuông góc với cả 2 đường thẳng d_1, d_2

- Từ $d_1, d_2 \Rightarrow$ vtcp của d_1, d_2 là $\vec{u}_1$ và $\vec{u}_2 \Rightarrow$ Tính $[\vec{u}_1, \vec{u}_2]$.

- Vì d vuông góc với d_1, d_2 nên có vtcp $\vec{u}_d = [\vec{u}_1, \vec{u}_2]$

- Ptđt d đi qua A và có vtcp $\vec{u}_d = [\vec{u}_1, \vec{u}_2]$

Dạng 6. Viết ptđt (d) là giao tuyến của 2 mp(P): $Ax + By + Cz + D = 0$,

(Q): $A'x + B'y + C'z + D' = 0$

- Từ (P) và (Q) $\Rightarrow \vec{n}_P, \vec{n}_Q$ là vtpt của hai mặt phẳng.

- Tính $[\vec{n}_P, \vec{n}_Q]$

- Xét hệ
$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0. \end{cases}$$

Chọn một nghiệm $(x_0; y_0; z_0)$ từ đó $\Rightarrow M(x_0; y_0; z_0) \in d$

- Phương trình đường thẳng (d) đi qua M và có vtcp $\vec{u}_d = [\vec{n}_P, \vec{n}_Q]$.

Dạng 7. Viết ptđt hình chiếu của d lên mp(P)

Cách 1. - Viết phương trình mp(Q) chứa đường thẳng d và vuông góc với mp(P).

- Hình chiếu cần tìm $d' = (P) \cap (Q)$.

Cách 2. - Tìm $A = d \cap (P)$ (chỉ áp dụng với giả thiết d cắt (P)).

- Lấy $M(x_0; y_0; z_0) \in d$ và xác định hình chiếu H của M lên (P).

- Viết phương trình d' đi qua M, H

Dạng 8. Viết ptđt d đi qua điểm A và cắt 2 đường thẳng d_1, d_2

Cách 1. Viết ptmp (α) đi qua điểm A và chứa đường thẳng d_1

- Tìm $B = (\alpha) \cap d_2$

- Đường thẳng cần tìm đi qua A, B

Cách 2. Viết ptmp (α) đi qua điểm A và chứa đường thẳng d_1

- Viết ptmp (β) đi qua điểm B và chứa đường thẳng d_2 .

- Đường thẳng cần tìm $d = \alpha \cap \beta$.

Dạng 9. Viết ptđt d song song d_1 và cắt cả d_2, d_3

- Viết ptmp(P) song song d_1 và chứa d_2
- Viết ptmp (Q) song song d_1 và chứa d_3
- Đường thẳng cần tìm $d = (P) \cap (Q)$

Dạng 10. Viết ptđt d đi qua A và vuông góc đường thẳng d_1 và cắt d_2

Cách 1. - Viết ptmp(α) qua A và vuông góc d_1 .

- Tìm giao điểm $B = (\alpha) \cap d_2$.
- Đường thẳng cần tìm đi qua A, B .

Cách 2. - Viết pt mp(α) qua A và vuông góc d_1 .

- Viết pt mp(β) qua A và chứa d_1 .
- Đường thẳng cần tìm $d = \alpha \cap \beta$.

Dạng 11. Viết ptđt d đi qua A , song song mp(α), cắt đường thẳng d'

Cách 1. Viết pt mp(P) đi qua A và song song với (α).

- Viết ptmp(Q) đi qua A và chứa d' .
- Đường thẳng cần tìm $d = (P) \cap (Q)$.

Cách 2. - Viết ptmp(P) đi qua A và song song với (α)

- Tìm $B = (P) \cap d'$.
- Đường thẳng cần tìm đi qua 2 điểm A, B .

Dạng 12. Viết ptđt d nằm trong mp(P) và cắt 2 đường thẳng d_1, d_2 cho trước.

- Tìm tọa độ giao điểm $A = d_1 \cap (P)$ và $B = d_2 \cap (P)$.
- Đường thẳng d đi qua 2 điểm A, B .

Dạng 13. Viết ptđt d nằm trong mp(P) và vuông góc với đường thẳng d' tại giao điểm I của (P) và d' .

- Tìm giao điểm $I = d' \cap (P)$
- Tìm vtcp $\vec{u}$ của d' và VTPT $\vec{n}$ của (P) và tính $\vec{v} = [\vec{u}, \vec{n}]$.
- Viết ptđt d qua I và có vtcp $\vec{v}$.

Dạng 14. Viết ptđt vuông góc chung d của 2 đường thẳng chéo nhau d_1, d_2

- Gọi $M(x_0 + at; y_0 + bt; z_0 + ct) \in d_1$ và $N(x_0 + at'; y_0 + bt'; z_0 + ct') \in d_2$

là các chân đường vuông góc chung của d_1, d_2 .

- Ta có hệ
$$\begin{cases} MN \perp d_1 \\ MN \perp d_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{MN} \cdot \vec{u}_1 = 0 \\ \vec{MN} \cdot \vec{u}_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow t, t'.$$

- Thay t, t' tìm M, N . Viết phương trình đường thẳng đi qua M, N .

(Với cách 2 tính thêm được khoảng cách MN , cũng chính là độ dài đường vuông góc chung của d_1, d_2)

Dạng 15. Viết ptđt d vuông góc với mp(P) và cắt 2 đường thẳng d_1, d_2

- Viết ptmp(Q) chứa đường thẳng d_1 và vuông góc với mp(P).
- Viết phương trình mp(R) chứa đường thẳng d_2 và vuông góc với mp(P).
- Đường thẳng $d = (Q) \cap (R)$

Dạng 16. Viết ptđt d đi qua điểm A , cắt và vuông góc với đường thẳng d_1

- Viết ptmp(α) qua A và vuông góc đường thẳng d_1 .
- Tìm giao điểm $B = (\alpha) \cap d_1$.
- Đường thẳng cần tìm đi qua A, B .

Dạng 17. Viết ptđt d đi qua A , đường thẳng d vuông góc với đường thẳng d_1 và tạo với đường thẳng d_2 góc $\alpha, \alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$

- Gọi vtcp của đường thẳng d là $\vec{u} = (a; b; c)$, với $a^2 + b^2 + c^2 > 0$
- Vì d vuông góc với $d_1 \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{u}_1 = 0$ (1)

- Vì d tạo với d_2 góc α nên $\cos \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{u}_2|}$ (2)

Từ hệ (1) vào (2) $\Rightarrow a, b, c \Rightarrow$ ptđt d .

Chú ý:

Nếu thay giả thiết là d tạo với mp(P) góc $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$ thì có $\sin \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{u}_P|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{u}_P|}$.

Dạng 18. Viết ptđt d đi qua A , song song với mp(P) và tạo với đường thẳng d_1 góc $\alpha, \alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$

- Gọi vtcp của đường thẳng d là $\vec{u} = (a; b; c)$, với $a^2 + b^2 + c^2 > 0$
- Vì $d // (P)$ nên $\vec{u} \cdot \vec{n}_P = 0$ (1)

- Vì $\cos(d, d_1) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{u}_1|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{u}_1|} = \cos \alpha$ (2)

- Giải hệ phương trình (1), (2) tìm a, b theo $c \Rightarrow$ chọn a, b, c .

$\Rightarrow$ Viết ptđt d đi qua A , có vtcp $\vec{u} = (a; b; c)$

Dạng 19. Viết ptđt d đi qua A , nằm trong mp(P) và tạo với đường thẳng d_1 góc $\alpha, \alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$

- Gọi vtcp của d là $\vec{u} = (a; b; c)$, $a^2 + b^2 + c^2 > 0$
- Vì $d \subset (P)$ nên $\vec{u} \cdot \vec{n}_P = 0$ (1)

$$\text{- Vì } d \text{ tạo với } d_1 \text{ góc } \alpha \text{ nên } \cos(d, d_1) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{u}_1|}{|\vec{u}| |\vec{u}_1|} = \cos \alpha \quad (2)$$

- Giải hệ phương trình (1), (2) tìm a, b theo c $\Rightarrow$ chọn a, b, c.

$\Rightarrow$ Viết ptđt d đi qua A , có vtcp $\vec{u} = (a; b; c)$

Dạng 20. Viết ptđt d đi qua A , vuông góc đường thẳng d_1 và khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng d bằng h

- Gọi vtcp của d là $\vec{u} = (a; b; c) \neq \vec{0}$

- Vì $d \perp d_1$ nên $\vec{u} \cdot \vec{n}_1 = 0 \quad (1).$

$$\text{- Vì } d(M, d) = h \Rightarrow \frac{|\vec{u} \cdot \vec{AM}|}{|\vec{u}|} = h \quad (2).$$

- Giải hệ phương trình (1), (2) tìm a, b theo c $\Rightarrow$ chọn a, b, c.

- Viết phương trình đường thẳng d đi qua A , có vtcp $\vec{u} = (a; b; c)$

V/ Khoảng cách và góc

A. Khoảng cách

1. Khoảng từ một điểm đến một đường thẳng.
2. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng.
3. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau.

B. Góc

1. Góc giữa 2 vectơ.
2. Góc giữa 2 đường thẳng.
3. Góc giữa 2 mặt phẳng.

VI/ Ứng dụng phương pháp tọa độ để giải toán hình học không gian

Để giải các bài toán hình học không gian bằng phương pháp tọa độ ta cần chọn hệ trục tọa độ thích hợp. Xác định mối liên hệ giữa các đỉnh để tìm tọa độ các đỉnh của hình.

Phương pháp

Bước 1. Chọn hệ trục tọa độ Oxyz thích hợp

Ta có: Ox, Oy, Oz vuông góc với nhau từng đôi một. Do đó, nếu hình vẽ bài toán cho có chứa các cạnh vuông góc thì ta ưu tiên chọn các cạnh đó làm trục tọa độ.

Bước 2. Xác định tọa độ các điểm (hoặc một số điểm cần thiết)

Chú ý. Khi xác định tọa độ các điểm có thể dựa vào:

- Ý nghĩa hình học của tọa độ điểm (khi các điểm nằm trên các trục tọa độ, các mặt phẳng tọa độ)

- Dựa vào quan hệ hình học: bằng nhau, vuông góc, song song, cùng phương, thẳng hàng, điểm chia đoạn thẳng theo tỉ số k .
- Điểm là giao điểm của đường thẳng với đường thẳng hoặc với mặt phẳng.
- Dựa vào quan hệ về góc...

Sau đây là một số cách gán hệ trục tọa độ cho một số hình không gian đặc biệt.

1. Với hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$

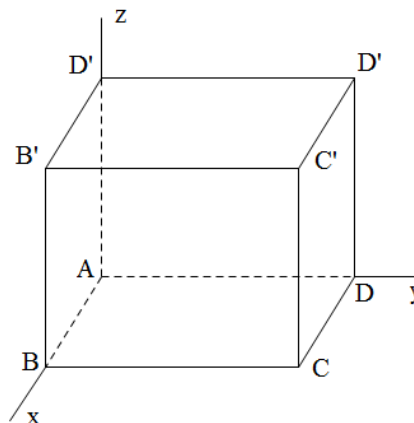
Với hình hộp chữ nhật có số đo 3 cạnh là:

$$AB = a, AD = b, AA' = c.$$

Chọn hệ trục tọa độ sao cho:

$$A(0;0;0), B(a;0;0), C(a;b;0), D(0;b;0),$$

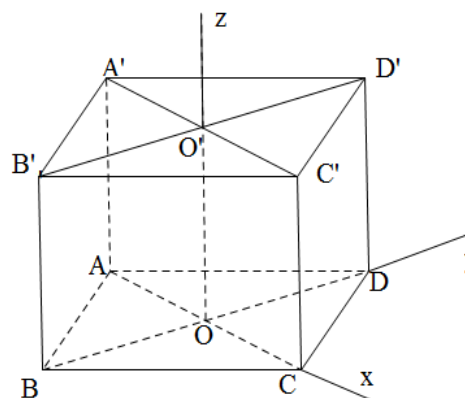
$$A'(0;0;c), B'(a;0;c), C'(a;b;c), D'(0;b;c).$$



2. Với hình hộp đáy là hình thoi $ABCD.A'B'C'D'$

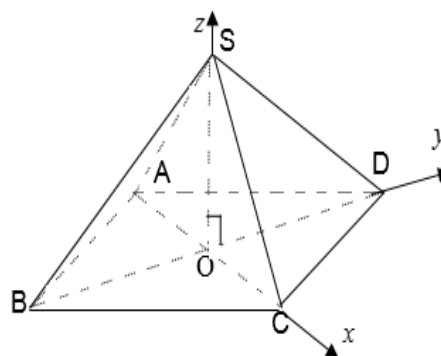
Chọn hệ trục tọa độ sao cho:

- Gốc tọa độ trùng với giao điểm O của hai đường chéo của hình thoi $ABCD$
- Trục Ox trùng tia OC , trục Oy trùng tia OD , trục Oz đi qua 2 tâm của 2 đáy.



3. Với hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$

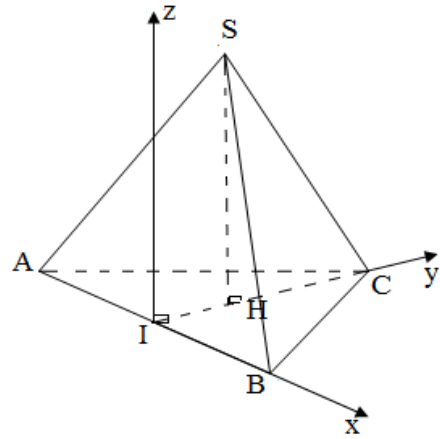
Cách 1. Có thể chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Giả sử cạnh hình vuông bằng a và đường cao $SO = h$. Chọn $O(0;0;0)$ là tâm của hình vuông



$$\text{Khi đó: } A(-\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0), B(0; -\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0), C(\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0), D(0; \frac{a\sqrt{2}}{2}; 0), S(0; 0; h).$$

4. Với hình chóp tam giác đều $S.ABC$

Cách 1. Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ
Giả sử cạnh tam giác đều bằng a và đường
cao bằng $SH = h$. Gọi I là trung điểm của
 AB . Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ sao
cho $I(0;0;0)$.

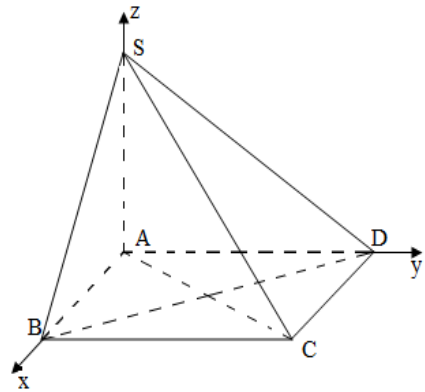


Khi đó : $A(-\frac{a}{2};0;0), B(\frac{a}{2};0;0), C(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};0), S(0;\frac{a\sqrt{3}}{6};h)$

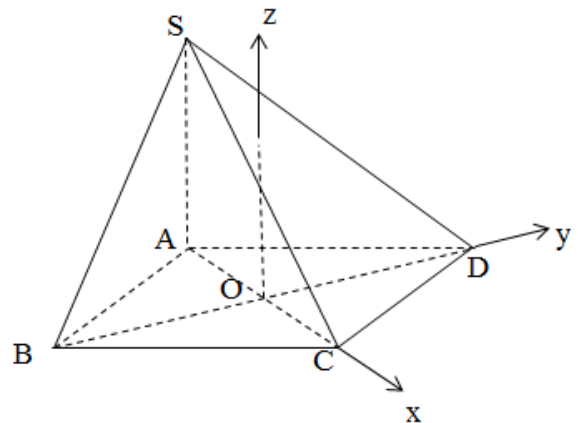
5. Với hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình
chữ nhật và $SA \perp (ABCD)$.

$ABCD$ là hình chữ nhật $AB = a, AD = b$ và
chiều cao bằng h

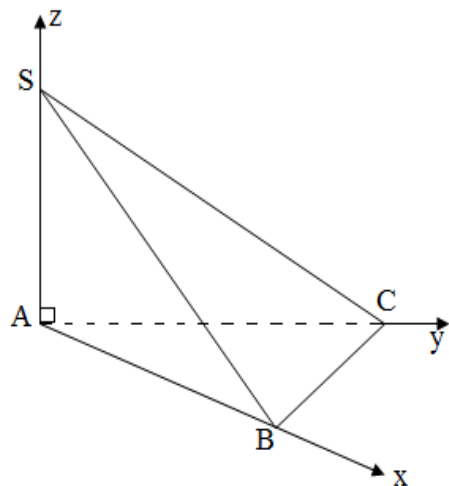
Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ sao cho
 $A(0;0;0)$. Khi đó: $B(a;0;0), C(a;a;0),$
 $D(0;b;0), S(0;0;h)$.



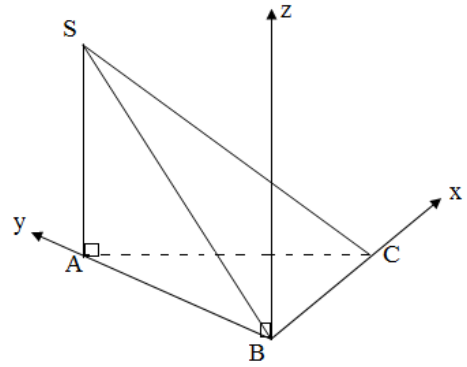
6. Với hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là
hình thoi cạnh a và $SA \perp (ABCD)$ chiều
cao $SA = h$. Chọn hệ trục tọa độ như hình
vẽ sao cho $O(0;0;0)$.



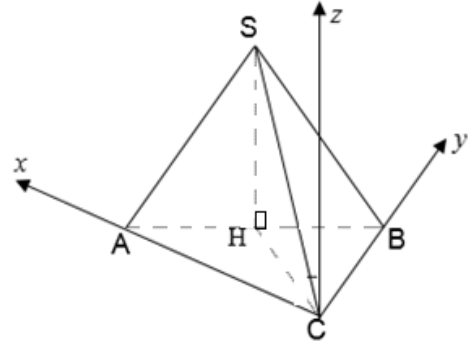
7. Với hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$
và $\triangle ABC$ vuông tại A
Tam giác $\triangle ABC$ vuông tại A có $AB = a,$
 $AC = b$ đường cao bằng h .
Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ sao cho
 $A(0;0;0)$. Khi đó: $B(a;0;0),$
 $C(0;b;0), S(0;0;h)$.



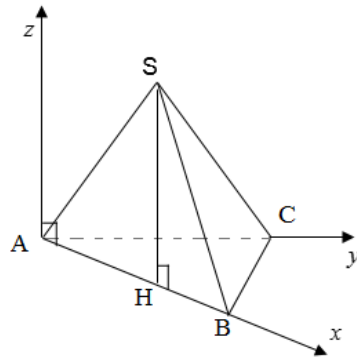
8. Với hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và ΔABC vuông tại B . Tam giác ΔABC vuông tại B có $BA = a$, $BC = b$ đường cao bằng h . Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ sao cho $B(0;0;0)$. Khi đó: $C(b;0;0)$, $A(0;a;0)$, $S(0;a;h)$.



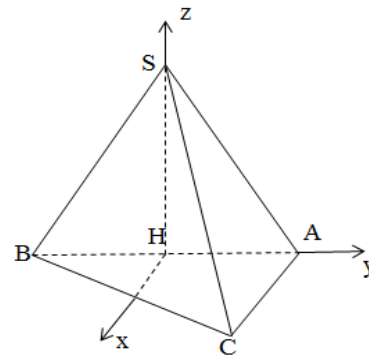
9. Với hình chóp $S.ABC$ có $(SAB) \perp (ABC)$, ΔSAB cân tại S và ΔABC vuông tại C với $CA = a$, $CB = b$ và chiều cao bằng h . H là trung điểm của AB . Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ sao cho $C(0;0;0)$. Khi đó: $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $S(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; h)$.



10. Với hình chóp $S.ABC$ có $(SAB) \perp (ABC)$, ΔSAB cân tại S và ΔABC vuông tại A .



Hình a)



Hình b)

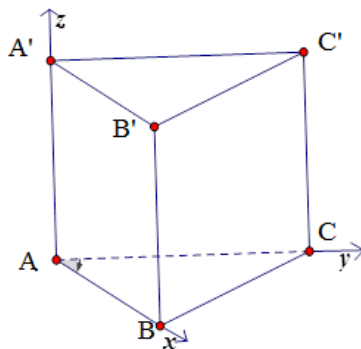
Hình a) Tam giác ABC vuông tại A : $AB = a$, $AC = b$ và chiều cao bằng h . H là trung điểm của AB . Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ sao cho $A(0;0;0)$

Khi đó $B(a;0;0)$, $C(0;b;0)$, $S(0; \frac{a}{2}; h)$.

Hình b) Tam giác ABC vuông tại A có $AB = a$, $AC = b$ đường cao $SH = h$. H là trung điểm của AB . Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ với $H(0;0;0)$. Khi

đó: $A(0; \frac{a}{2}; 0)$, $B(-\frac{a}{2}; 0; 0)$, $C(\frac{a}{2}; b; 0)$, $S(0; 0; h)$

11. Hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A



Bước 3. Sử dụng các kiến thức về tọa độ để giải quyết bài toán

Các dạng toán thường gặp:

- Độ dài đoạn thẳng.
- Khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng, đường thẳng.
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau.
- Quan hệ góc giữa đường thẳng với đường thẳng, đường thẳng với mặt phẳng.
- Thể tích khối đa diện. Diện tích thiết diện.
- Chứng minh quan hệ song song, quan hệ vuông góc...

Ví dụ. (Đề thi thử tốt nghiệp THPT Chuyên ban Hạ Long – 2015).

Cho hình chóp $S.ABC$ có ABC, SBC là các tam giác đều cạnh a . Góc giữa 2 mặt phẳng (SBC) và (ABC) là 60° . Hình chiếu vuông góc của S xuống (ABC) nằm trong tam giác ABC . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách từ B đến (SAC) theo a .

Giải.

- Gọi M là trung điểm BC suy ra AM và SM vuông góc BC

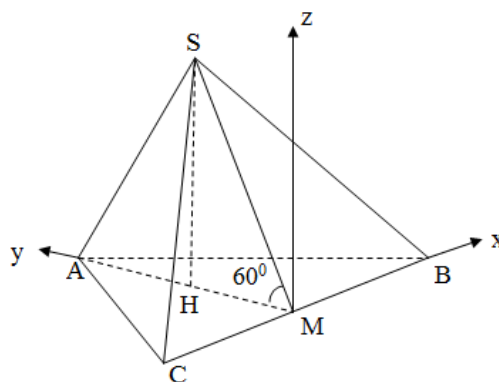
$\Rightarrow$ Góc giữa (SBC) và (ABC) bằng góc giữa SM và AM bằng 60° .

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên $(ABC) \Rightarrow M$ thuộc đoạn AM

$$\Rightarrow \angle SMH = 60^\circ. \quad \text{Vậy } SM = AM = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

$$SH = SM \cdot \sin 60^\circ = \frac{3a}{4}, \quad MH = \frac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow H \text{ trung điểm } AM$$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a}{4} \cdot \frac{1}{2} a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{16}$$



- Gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với $M(0;0;0)$, $B(\frac{a}{2};0;0)$, $A(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};0)$, $C(-\frac{a}{2};0;0)$,

$H(0;\frac{a\sqrt{3}}{4};0)$, $S(0;\frac{a\sqrt{3}}{4};\frac{3a}{4})$. Ta có

$$\vec{SA} = \left(0; \frac{a\sqrt{3}}{4}; -\frac{3a}{4}\right) = \frac{a\sqrt{3}}{4}(0;1;-\sqrt{3}), \vec{SC} = \left(-\frac{a}{2}; -\frac{a\sqrt{3}}{4}; \frac{3a}{4}\right) = -\frac{a}{4}(2;\sqrt{3};3),$$

$$[\vec{SA}, \vec{SC}] = -\frac{a^2\sqrt{3}}{8}(3;-\sqrt{3};-1).$$

Chọn $\vec{n} = (3;-\sqrt{3};-1)$ là vtpt của mp(SAC).

Phương trình mp(SAC) là: $3x - \sqrt{3}y - z + \frac{3a}{2} = 0$

Khoảng cách từ B đến (SAC) là:

$$d(B, (SAC)) = \frac{\left|3 \cdot \frac{a}{2} - \sqrt{3} \cdot 0 - 1 \cdot 0 + \frac{3a}{2}\right|}{\sqrt{3^2 + 3 + 1}} = \frac{3a\sqrt{13}}{13}$$

THỰC NGHIỆM SƯ PHẠM
ĐỀ KIỂM TRA TRẮC NGHIỆM

(Thời gian: 60 phút)

I. Phần trắc nghiệm (4 điểm)

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$.

Câu 1. Cho $\vec{a} = (2; -1; 3)$, $\vec{b} = (0; 1; 2)$, $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$. Tìm tọa độ vector $\vec{c}$?

(A) $\vec{c} = (2; 0; 5)$

(B) $\vec{c} = (2; 1; 7)$

(C) $\vec{c} = (2; -1; -7)$

(D) $\vec{c} = (2; -3; -1)$

Câu 2. Cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành, với $A(3; -1; 2)$, $B(2; 0; 2)$, $C(4; 1; 5)$. Tìm tọa độ điểm D ?

(A) $D = (5; 0; 5)$

(B) $D = (-3; -2; -5)$

(C) $D = (-1; 1; 1)$

(D) $D = (-3; 2; 6)$

Câu 3. Cho ba điểm $A(1; 2; 0)$, $B(1; 0; -1)$, $C(0; -1; 1)$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

(A) Tam giác ABC cân

(B) Tam giác ABC đều

(C) Tam giác ABC vuông

(D) Cả ba đáp án đều sai

Câu 4. Cho $P(3; 4; 1)$, $Q(5; 2; -3)$. Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn PQ là:

(A) $x - y - 2z - 3 = 0$

(B) $2x - 2y - 4z - 3 = 0$

(C) $x + y + 2z - 3 = 0$

(D) $x - y - 2z = 0$

Câu 5. Cho mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1, -1, 1)$ và song song với hai vector $\vec{a} = (1; 2; 3)$, $\vec{b} = (3; 1; 0)$. Phương trình mặt phẳng (α) :

(A) $3x - 9y + 5z = 0$

(B) $6x - 16y + 10z + 8 = 0$

(C) $3x - 9y + 5z + 17 = 0$

(D) $3x - 9y + 5z - 17 = 0$

Câu 6. Mặt phẳng (α) đi qua ba điểm $A(2; 0; 0)$, $B(0; 3; 0)$, $C(0; 0; -1)$. Phương trình mặt phẳng (α) là:

(A) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} - \frac{z}{1} = 0$

(B) $\frac{x}{4} + \frac{y}{6} + \frac{z}{-2} = 2$

(C) $3x + 2y - 6z - 6 = 0$.

(D) $3x + 2y - 6z = 0$.

Câu 7. Mặt cầu (S) có tâm $I(3; -2; 1)$ và tiếp xúc với $(\alpha): 2x - 2y - z + 1 = 0$. (S) có bán kính R bằng:

(A) 3

(B) 10

(C) $\frac{10}{3}$

(D) $\frac{10}{9}$

Câu 8. Cho đường thẳng d đi qua $M(-2;0;1)$ và có vector chỉ phương $\vec{u} = (4; -6; 2)$. Phương trình đường thẳng d là:

$$(A) \begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = -6t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

$$(B) \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -3t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

$$(C) \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -6 \\ z = 2 + t \end{cases}$$

$$(D) \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -6 - 3t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

Câu 9. Cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2t \\ z = 3 + t \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -4t \\ z = 6 + 2t \end{cases}$

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

$$(A) d_1 \equiv d_2$$

$$(B) d_1 \perp d_2$$

$$(C) d_1 // d_2$$

$$(D) d_1 \text{ chéo } d_2$$

Câu 10. Cho mặt phẳng $(\alpha): x + y + 2z + 1 = 0$ và đường thẳng

$$d: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 + t \\ z = 1 - t \end{cases} \text{ . Khẳng định nào sau đây là đúng?}$$

$$(A) d \subset (\alpha)$$

$$(B) d \perp (\alpha)$$

$$(C) d \text{ cắt } (\alpha)$$

$$(D) d // (\alpha)$$

II. Tự luận (6 điểm)

Câu 11. (3 điểm) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; -1; 3)$ và $B(3; 2; 1)$

$$\text{và hai đường thẳng: } \Delta_1: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t \\ z = 2 \end{cases}; \Delta_2: \frac{x-3}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$$

a/ Viết phương trình đường thẳng AB .

b/ Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua A và vuông góc với Δ_1

c/ Chứng minh Δ_1 và Δ_2 chéo nhau

d/ Viết phương trình mp (P) chứa Δ_1 và song song Δ_2

Câu 12. (3 điểm) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d và mặt phẳng

$$(P) \text{ lần lượt có phương trình } (d): \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = -t \end{cases}; (P): x - 3y + 2z + 6 = 0$$

- a) Tìm tọa độ điểm A là giao điểm của đường thẳng d và mp(P).
- b) Viết phương trình đường thẳng nằm trong (P), cắt và vuông góc với d .
- c) Viết phương trình mặt cầu (S) tâm $I(2;1;1)$ và tiếp xúc với đường thẳng d .

ĐÁP ÁN VÀ BIỂU ĐIỂM

I. Trắc nghiệm. Mỗi câu trả lời đúng được 0,4 điểm.

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Đáp án	B	A	C	A	D	C	C	B	C	D

II. Tự luận

CÂU	NỘI DUNG ĐÁP ÁN	ĐIỂM
11.a 0,5đ	$\vec{AB} = (1; 3; -2)$ là một vector chỉ phương của đường thẳng AB .	0.25
	Đường thẳng AB qua $A(2; -1; 3)$ có vtcp $\vec{AB} = (1; 3; -2)$ có phương trình $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 3t, t \in R \\ z = 3 - 2t \end{cases}$	0.25
11.b 0,5đ	Δ_1 có vtcp là $\vec{u} = (1; -1; 0)$ (Q) vuông góc với D_1 nên có vtpt là $\vec{n}_Q = \vec{u} = (1; -1; 0)$, (Q) qua $A(2; -1; 3)$	0,25
	Phương trình mp $(Q): 1(x - 2) - (y + 1) = 0$ $\Leftrightarrow x - y - 3 = 0$	0,25
11.c 1đ	Δ_1 đi qua điểm $M_1(1; -1; 2)$, có vtcp $\vec{u}_1 = (1; -1; 0)$ đi qua điểm $M_2(3; 1; 0)$, có vtcp $\vec{u}_2 = (-1; 2; 1)$	0.25
	Ta có, $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (-1; -1; 1)$	0,25
	$\vec{M_1M_2} = (2; 2; -2)$	0,25
	$\Rightarrow [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \vec{M_1M_2} = -1.2 - 1.2 + 1.(-2) = -6 \neq 0$ Suy ra, Δ_1 và Δ_2 chéo nhau.	0,25
11.d 1đ	mp(P) chứa Δ_1 và song song Δ_2 nên đi qua $M_1(1; -1; 2)$	0,25
	(P) có vector pháp tuyến $\vec{n}_1$ thỏa $\begin{cases} \vec{n}_1 \perp \vec{u}_1 \\ \vec{n}_1 \perp \vec{u}_2 \end{cases}$	0,25

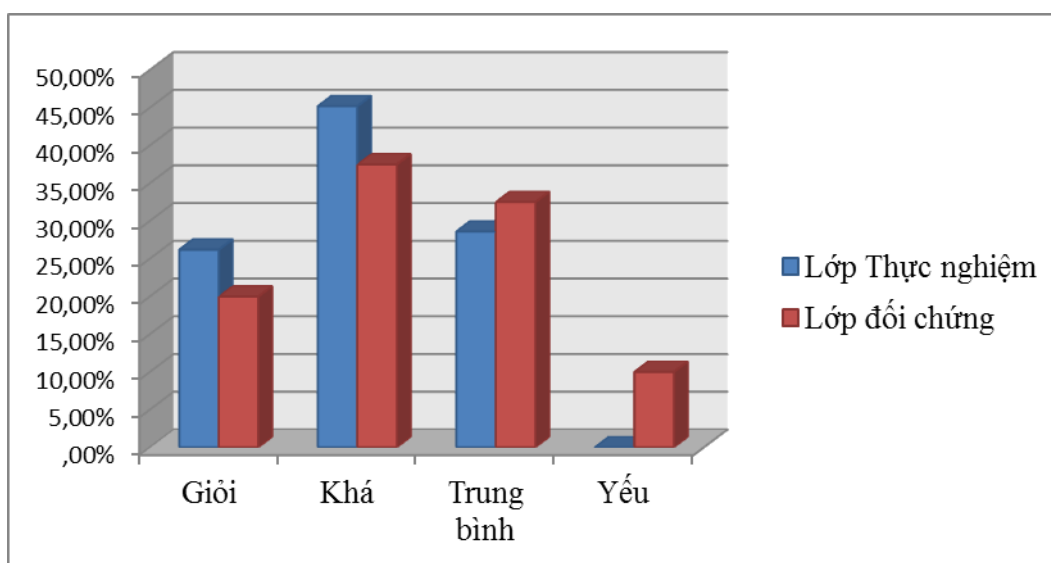
	Tìm được vector pháp tuyến $\vec{n}_1$	0,25
	Vậy ptmp(P): $-1(x-1)-1(y+1)+1(z-2)=0$	0,25
	$\Leftrightarrow x+y-z+2=0$	0,25
12.a 1đ	Thay ptts của d vào ptmp(P), ta được: $(-3+2t)-3(-1+t)+2(-t)+6=0$ $\Leftrightarrow -3t+6=0 \Leftrightarrow t=2$	0.5
	Thay $t=2$ vào ptts của d ta được tọa độ giao điểm của d và mp(P) là: $A(1;1;-2)$	0.5
12.b 1đ	(P) có vtpt $\vec{n}_p(1,-3,2)$; d có vtcp $\vec{u}(2;1;-1)$; giao điểm của (P) và d là $A(1;1;-2)$	0,25
	Gọi d_1 là đường thẳng cần tìm có vtcp $\vec{u}_1$ d_1 nằm trong (P), cắt và vuông góc d nên d_1 qua $A(1;1;-2)$ là giao điểm của (P) và d	0,25
	và có vecto chỉ phương $\vec{u}_1$ thỏa $\begin{cases} \vec{u}_1 \perp \vec{n}_p \\ \vec{u}_1 \perp \vec{u} \end{cases}$	0,25
	$\vec{u}_1 = [\vec{n}_p, \vec{u}] = (1;5;7)$ d_1 có phương trình: $\begin{cases} x=1+t \\ y=1+5t \\ z=-2+7t \end{cases}$	0,25
12.c 1đ	Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên d tọa độ $H(3+2t;-1+t;-t)$, $\vec{IH}(-5+2t;-2+t;-1-t)$, đường thẳng d có vtcp là $\vec{u}=(2;1;-1)$	0,25
	$\vec{IH}$ vuông góc với $\vec{u}$ suy ra $\vec{IH} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow -10+4t-2+t+1+t=0 \Leftrightarrow 6t=11 \Leftrightarrow t=11/6$	0,25
	Suy ra $\vec{IH}(-4/3;-1/6;-17/6)$, Suy ra $IH = \sqrt{59/6}$	0,25
	Vì mặt cầu tiếp xúc với d nên có bán kính $R = IH = \sqrt{59/6}$ Phương trình mặt cầu $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 59/6$	0,25

Kết quả bài kiểm tra số 2 được thể hiện trong bảng sau:

Bảng thống kê kết quả kiểm tra các lớp sau thực nghiệm 2

Loại	Giỏi	Tỉ lệ	Khá	Tỉ lệ	TB	Tỉ lệ	Yếu	Tỉ lệ
Lớp TN 12A2	11	26,2%	19	45,2%	12	28,6%	0	0%
Lớp ĐC 12A3	8	20%	15	38%	13	33%	4	10%

Biểu đồ so sánh kết quả của lớp thực nghiệm và lớp đối chứng



Qua kết quả thực nghiệm cho chúng tôi thấy tỉ lệ điểm trên trung bình ở lớp thực nghiệm cao hơn lớp đối chứng. Tỉ lệ khá giỏi ở cả hai lớp đều tăng lớp thực nghiệm. Điều này nói lên rằng các em ngày càng hoàn thiện về kỹ năng làm bài, khả năng tư duy logic và diễn đạt, năng lực giải quyết vấn đề. Các em tự tin hơn trong học tập, thái độ học tập nghiêm túc, độc lập hơn.

Lớp thực nghiệm trình bày chặt chẽ hơn, lí luận rõ ràng, chính xác, cách giải phong phú hơn. Khả năng vẽ hình không gian tốt hơn... Điều này đã khẳng định việc vận dụng một số phương pháp dạy tích cực mà luận văn đề xuất đạt hiệu quả nhất định.

KẾT LUẬN VÀ KHUYẾN NGHỊ

1. Kết luận

Qua quá trình thực nghiệm tại trường THPT tôi đạt được một số kết quả sau:

- Các biện pháp được sử dụng ở trên luôn quan tâm đến người học, tạo môi trường học tập có thi đua, học sinh được tìm tòi khám phá và giải quyết vấn đề. Cùng nhau hoạt động, được đánh giá lẫn nhau và tự đánh giá. Các em được phát huy tích cực, phát triển tư duy.

- Tổ chức giờ dạy thực nghiệm.

- Đánh giá kết quả học tập của học sinh thông qua nhận xét của giáo viên, nhận xét của học sinh và thông qua bài kiểm tra.

- Nhận xét các kết quả thực nghiệm.

Từ các kết quả thu được cho thấy phương pháp dạy học tích cực đạt hiệu quả tốt hơn phương pháp dạy học truyền thống. Các em học sinh hứng thú hơn, mạnh dạn hơn, có tinh thần làm việc với tập thể, chủ động trong học tập. Điều đó càng chứng tỏ mỗi giáo viên cần và rất cần vận dụng và đẩy mạnh việc đổi mới phương pháp dạy học trong trường trung học phổ thông.

Tuy nhiên, nội dung chương trình được xây dựng trong một khung cho mỗi đơn vị học tập nên giáo viên vừa đảm bảo về chất lượng và số lượng thì giáo viên còn gặp nhiều khó khăn khi triển khai giờ dạy theo hướng tích cực.

2. Khuyến nghị

Qua quá trình thực hiện đề tài, tôi có khuyến nghị như sau: Đề nghị nhà trường và ngành giáo dục quan tâm hơn nữa về đầu sách tham khảo vì đó là nguồn tư liệu quý cho chúng tôi giảng dạy và học tập, bổ xung đồ dùng dạy học cho môn toán, đặc biệt phục vụ cho phần Hình học không gian.

Hà Nội, ngày 15 tháng 05 năm 2018

Tác giả

Nguyễn Thị Mai Liên