

MỤC LỤC

STT	Nội Dung	Trang
1	Mục lục	1
2	Phần I: Mở Đầu	2
3	1. Lý do chọn đề tài	2
4	2. Mục đích nghiên cứu	2
5	3. Đối tượng nghiên cứu	3
6	4. Giới hạn	3
7	5. Nhiệm vụ của đề tài	3
8	6. Phương pháp nghiên cứu	3
9	7. Thời gian nghiên cứu	3
10	Phần II: Nội dung của đề tài	4
11	1. Cơ sở lí luận khoa học	4
12	2. Thực trạng của đề tài	4
13	3. Giải quyết vấn đề	4
14	4. Nội dung	5
14	4.1. Kiến thức cơ bản	5
15	4.2. Một số dạng toán cơ bản.	6
16	4.3. Bài tập trắc nghiệm	21
17	Phần III: Kết luận, khuyến nghị	28
18	Phần IV: Tài liệu tham khảo	29

Phần I: MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Mục tiêu đào tạo của nhà trường phổ thông Việt Nam là hình thành những cơ sở ban đầu và trọng yếu của con người mới: phát triển toàn diện phù hợp với yêu cầu và điều kiện hoàn cảnh đất nước con người Việt Nam.

Trong giai đoạn hiện nay, mục tiêu đào tạo của nhà trường phổ thông Việt Nam đã được cụ thể hoá trong các văn kiện của Đảng, đại hội đại biểu toàn quốc lần thứ VIII Đảng cộng sản Việt Nam và kết luận của hội nghị trung ương khoá IX, mục tiêu này gắn với chính sách chung về giáo dục và đào tạo “ Giáo dục và đào tạo gắn liền với sự phát triển kinh tế, phát triển khoa học kỹ thuật xây dựng nền văn hoá mới và con người mới...”, “Chính sách giáo dục mới hướng vào bồi dưỡng nhân lực, nâng cao dân trí, bồi dưỡng nhân tài, hình thành đội ngũ lao động có trí thức, có tay nghề...”

Môn Toán trong trường phổ thông giữ một vai trò, vị trí hết sức quan trọng là môn học công cụ nếu học tốt môn Toán thì những tri thức trong Toán cùng với phương pháp làm việc trong toán sẽ trở thành công cụ để học tốt những môn học khác.

Môn Toán góp phần phát triển nhân cách, ngoài việc cung cấp cho học sinh hệ thống kiến thức, kỹ năng toán học cần thiết môn Toán còn rèn luyện cho học sinh đức tính, phẩm chất của người lao động mới: cẩn thận, chính xác, có tính kỷ luật, tính phê phán, tính sáng tạo, bồi dưỡng óc thẩm mỹ. Sách giáo khoa toán là tài liệu chính thống được sử dụng trong nhà trường phổ thông.

Bài toán về số phức là một bài toán quan trọng vì nó thường hay xuất hiện trong các đề thi THPT quốc gia. Vì vậy, các bạn học sinh lớp 12 luyện thi THPT quốc gia cần phải chú ý nhiều đến dạng bài tập này. Qua quá trình giảng dạy tôi nhận thấy nhiều học sinh, kể cả học sinh khá giỏi vẫn còn mơ hồ, hiểu chưa đầy đủ về khái niệm số phức dẫn đến việc giải toán về số phức còn nhiều sai sót thậm chí có những lời giải sai kiến thức cơ bản dẫn đến học sinh chọn sai đáp án khi làm bài trắc nghiệm.

Vì vậy, trong phần hệ thống các bài toán về số phức tôi cố gắng phân loại đề học sinh có thể dễ dàng nhận biết và áp dụng cách giải cho từng dạng toán cụ thể.

Từ lý do chọn đề tài, từ cơ sở thực tế giảng dạy cùng với kinh nghiệm của bản thân, tôi đã hệ thống hoá lại kiến thức thành một chuyên đề:

“Phân loại các bài toán số phức” .

2. Mục đích nghiên cứu:

- Tìm ra phương pháp dạy học phù hợp với học sinh, tạo hứng thú học tập cho học sinh. Từ đó nâng cao chất lượng học tập của học sinh trong các tiết học.
- Qua nội dung của đề tài tôi muốn cung cấp cho học sinh một số kỹ năng cơ bản và phát hiện ra các dạng toán của số phức và phương pháp giải bài toán về số phức một cách phù hợp.

- Học sinh thông hiểu và trình bày bài toán hợp logic và không mắc sai lầm khi giải toán về số phức. Hi vọng đề tài nhỏ này ra đời giúp các em học sinh có cách nhìn khái quát toàn diện về số phức.

3. Đối tượng nghiên cứu:

Bài toán về số phức cho học sinh các lớp 12a7, 12a13

4. Giới hạn của đề tài:

- Một số bài toán về số phức cơ bản, nâng cao nằm trong chương trình Giải tích 12

5. Nhiệm vụ của đề tài:

- Giúp cho giáo viên thực hiện tốt nhiệm vụ và nâng cao chất lượng giáo dục, giúp cho học sinh phát triển tư duy logic, thấy được Toán học rất gần gũi với đời sống thực tế xung quanh ta.

- Rút ra kết luận và đề xuất một số biện pháp khi tiến hành giúp đỡ từng đối tượng học sinh nhằm nâng cao chất lượng giảng dạy trong nhà trường THPT.

6. Phương pháp nghiên cứu:

Để thực hiện mục đích và nhiệm vụ của đề tài, trong quá trình nghiên cứu tôi đã sử dụng các nhóm phương pháp sau:

Nghiên cứu các loại tài liệu sư phạm, quản lý có liên quan đến đề tài.

Phương pháp quan sát (công việc dạy- học của giáo viên và HS).

Phương pháp điều tra (nghiên cứu chương trình, hồ sơ chuyên môn,...).

Phương pháp đàm thoại phỏng vấn (lấy ý kiến của giáo viên và HS thông qua trao đổi trực tiếp).

Phương pháp thực nghiệm.

7. Thời gian nghiên cứu:

Năm học 2017-2018.

Phần II: NỘI DUNG CỦA ĐỀ TÀI

1. Cơ sở lí luận khoa học

- Trong chương trình giáo dục phổ thông, môn toán là môn học quan trọng. Môn toán có tiềm năng để có thể khai thác góp phần phát triển trí tuệ chung, rèn luyện và phát triển tư duy.

- Muốn học tốt môn Toán các em phải nắm vững các kiến thức khoa học ở môn toán một cách có hệ thống. Biết vận dụng lí thuyết linh hoạt vào từng dạng toán. Điều đó thể hiện ở việc học đi đôi với hành, đòi hỏi học sinh có tư duy logic, cách suy nghĩ khoa học sáng tạo, cách trình bày bài hợp lí chặt chẽ ngắn gọn. Giáo viên cần định hướng cho học sinh nghiên cứu toán học một cách có hệ thống, vận dụng lí thuyết vào thực hành bài tập.

- Do vậy tôi mạnh dạn viết sáng kiến này với mục đích giúp cho học sinh vận dụng và tìm ra phương pháp giải khi gặp các bài toán về số phức.

2. Thực trạng của đề tài

2.1. Cách thực hiện :

- Trao đổi với đồng nghiệp, tham khảo ý kiến của các giáo viên cùng tổ nhóm chuyên môn

- Liên hệ thực tế với nhà trường, áp dụng đúc rút kinh nghiệm trong quá trình giảng dạy

- Thông qua việc dạy trực tiếp các lớp 12.

2.2. Khảo sát chất lượng :

Thông qua việc khảo sát chất lượng trước khi thực hiện đề tài ở các lớp giảng dạy, tôi thấy đa số học sinh chưa phân biệt được các dạng của bài toán số phức để đưa ra phương pháp giải hợp lí cho các bài toán về số phức đó, số ít học sinh có đáp số đúng nhưng chưa lập luận để dẫn đến kết quả trên hoặc có lập luận thì cũng lúng cúng, chưa chặt chẽ rõ ràng hoặc các em chọn ngẫu nhiên đáp án của bài toán trắc nghiệm.

2.3. Tìm hiểu nguyên nhân dẫn đến kết quả.

- Số phức là một mảng tương đối mơ hồ đối với nhiều học sinh trong khi bài tập trong SGK không phong phú đa dạng và còn hạn chế. Cho nên học sinh học cũng rời rạc ,không có hứng thú.

- Mặt khác, thời lượng trong phân phối chương trình dành cho bài tập còn ít nên các giáo viên không thể đưa ra nhiều bài tập cho nhiều dạng để hình thành kĩ năng giải cho học sinh.

- Học sinh còn thụ động và có tâm lí ngại khó khi học phần này

3. Giải quyết vấn đề

Qua nghiên cứu trao đổi và đúc rút từ kinh nghiệm thực tế và ý kiến của đồng nghiệp tôi mạnh dạn đưa ra hướng giải quyết các vấn đề trên của học sinh với những giải pháp: Hệ thống lại các kiến thức cơ bản cần nắm vững và phân dạng các bài toán về số phức.

4. NỘI DUNG

4.1. LÝ THUYẾT

4.1.1. Định nghĩa Mỗi biểu thức có dạng $a + bi$, trong đó a, b là các số thực và số i thoả mãn $i^2 = -1$ được gọi là một số phức.

Ký hiệu số phức đó là z và viết $z = a + bi$. Trong đó:

i được gọi là đơn vị ảo

a được gọi là phần thực của số phức $z = a + bi$, ký hiệu $\text{Re}(z) = a$

b được gọi là phần ảo của số phức $z = a + bi$, ký hiệu $\text{Im}(z) = b$

Tập hợp các số phức ký hiệu là $\mathbb{C}$.

*) Một số lưu ý:

- Mỗi số thực a đều được xem như là số phức với phần ảo $b = 0$.
- Số phức $z = a + bi$ có $a = 0$ được gọi là số thuần ảo hay là số ảo.
- Số 0 vừa là số thực vừa là số ảo.

4.1.2. Hai số phức bằng nhau.

Cho $z = a + bi$ và $z' = a' + b'i$.

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$$

4.1.3. Biểu diễn hình học của số phức.

Mỗi số phức được biểu diễn bởi một điểm $M(a;b)$ trên mặt phẳng toạ độ Oxy.

Ngược lại, mỗi điểm $M(a;b)$ biểu diễn một số phức là $z = a + bi$.

4.1.4. Phép cộng và phép trừ các số phức.

Cho hai số phức $z = a + bi$ và $z' = a' + b'i$. Ta định nghĩa:

$$z + z' = (a + a') + (b + b')i$$

$$z - z' = (a - a') + (b - b')i$$

4.1.5. Phép nhân số phức.

Cho hai số phức $z = a + bi$ và $z' = a' + b'i$. Ta định nghĩa:

$$z.z' = aa' - bb' + (ab' + a'b)i$$

4.1.6. Số phức liên hợp.

Cho số phức $z = a + bi$. Số phức $\bar{z} = a - bi$ gọi là số phức liên hợp với số phức trên.

$$\text{Vậy } \bar{\bar{z}} = \overline{a + bi} = a - bi$$

Chú ý: 1) $\bar{\bar{z}} = z \Rightarrow z$ và $\bar{z}$ gọi là hai số phức liên hợp với nhau.

$$2) z.\bar{z} = a^2 + b^2$$

*) Tính chất của số phức liên hợp:

$$(1): \bar{\bar{z}} = z$$

$$(2): \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$$

$$(3): \overline{z.z'} = \bar{z}.\bar{z'}$$

$$(4): z.\bar{z} = a^2 + b^2 \quad (z = a + bi)$$

4.1.7. Môđun của số phức.

Cho số phức $z = a + bi$. Ta ký hiệu $|z|$ là môđun của số phức z , đó là số thực không âm được xác định như sau:

- Nếu $M(a;b)$ biểu diễn số phức $z = a + bi$, thì $|z| = |\overline{OM}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

- Nếu $z = a + bi$, thì $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$

4.1.8. Phép chia số phức khác 0.

Cho số phức $z = a + bi \neq 0$ (tức là $a^2 + b^2 > 0$)

Ta định nghĩa số phức nghịch đảo z^{-1} của số phức $z \neq 0$ là số

$$z^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \bar{z} = \frac{1}{|z|^2} \bar{z}$$

Thương $\frac{z'}{z}$ của phép chia số phức z' cho số phức $z \neq 0$ được xác định như sau:

$$\frac{z'}{z} = z' z^{-1} = \frac{z' \bar{z}}{|z|^2}$$

Với các phép tính cộng, trừ, nhân chia số phức nói trên nó cũng có đầy đủ tính chất giao hoán, phân phối, kết hợp như các phép cộng, trừ, nhân, chia số thực thông thường.

4.2. MỘT SỐ DẠNG TOÁN CƠ BẢN.

4.2.1. Các phép tính về số phức.

Phương pháp giải:

Sử dụng các công thức cộng, trừ, nhân, chia và lũy thừa số phức.

Chú ý cho HS: Trong khi tính toán về số phức ta cũng có thể sử dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ như trong số thực. Chẳng hạn bình phương của tổng hoặc hiệu, lập phương của tổng hoặc hiệu 2 số phức...

Ví dụ 1: Cho số phức $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

Tính các số phức sau: $\bar{z}$; z^2 ; $(\bar{z})^3$; $1 + z + z^2$

Giải:

a) Vì $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \Rightarrow \bar{z} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

b) Ta có $z^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}i^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$\Rightarrow (\bar{z})^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}i^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

c) $(\bar{z})^3 = (\bar{z})^2 \cdot \bar{z} = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i + \frac{3}{4}i - \frac{\sqrt{3}}{4} = i$

d) Ta có: $1 + z + z^2 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \frac{3+\sqrt{3}}{2} - \frac{1+\sqrt{3}}{2}i$

Nhận xét: Trong bài toán này, để tính $(\bar{z})^3$ ta có thể sử dụng hằng đẳng thức như trong số thực.

Với bài toán trắc nghiệm ta có thể sử dụng máy tính để tìm đáp án như sau

b) +**Bước 1:** Ấn MODE $\rightarrow$ 2 (CMPLX)

+**Bước 2:** Nhập $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^2$

+**Bước 3:** Ấn dấu “=” ta được kết quả là $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Vậy $z^2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

c) +**Bước 1:** Ấn MODE $\rightarrow$ 2 (CMPLX)

+**Bước 2:** Nhập $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^3$

+**Bước 3:** Ấn dấu “=” ta được kết quả là i . Vậy $(\bar{z})^3 = i$

d) +**Bước 1:** Ấn MODE $\rightarrow$ 2 (CMPLX)

+**Bước 2:** Nhập $1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^2$

+**Bước 3:** Ấn dấu “=” ta được kết quả là $\frac{3+\sqrt{3}}{2} - \frac{1+\sqrt{3}}{2}i$.

Vậy $1 + z + z^2 = \frac{3+\sqrt{3}}{2} - \frac{1+\sqrt{3}}{2}i$

Ví dụ 2: Tìm số phức liên hợp của: $z = \frac{(3-2i)[(4+3i)-(1+2i)]}{5-4i}$

Giải: Ta có :

$$\begin{aligned} z &= \frac{(3-2i)(3+i)}{5-4i} = \frac{9+3i-6i+2}{5-4i} = \frac{(11-3i)(5+4i)}{41} \\ &= \frac{55+44i-15i+12}{41} = \frac{67}{41} + \frac{29}{41}i \\ \Rightarrow \bar{z} &= \frac{67}{41} - \frac{29}{41}i. \end{aligned}$$

Với bài toán trắc nghiệm ta có thể sử dụng máy tính để tìm đáp án như sau

+**Bước 1:** Ấn MODE $\rightarrow$ 2 (CMPLX)

+**Bước 2:** Ấn SHIFT $\rightarrow$ 2 $\rightarrow$ 2 $\rightarrow$ ALPHA $\rightarrow$) $\rightarrow$). Khi đó màn hình máy tính xuất hiện Conjug(X) với Conjug(X) là $\bar{z}$

+Bước 3: CALC $\frac{(3-2i)[(4+3i)-(1+2i)]}{5-4i}$. Ấn dấu “=” ta được kết quả là

$$\frac{67}{41} - \frac{29}{41}i. \text{ Vậy } \Rightarrow \bar{z} = \frac{67}{41} - \frac{29}{41}i$$

Ví dụ 3: Cho số phức $z = (2+i)(1-i) + 3i$. Tìm môđun của số phức z

Giải: Ta có : $z = (2+i)(1-i) + 3i = 2 - 2i + i - i^2 + 3i = 3 + 2i$

Vậy, môđun của z bằng: $|z| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

Với bài toán trắc nghiệm ta có thể sử dụng máy tính để tìm đáp án như sau

+Bước 1: Ấn MODE $\rightarrow$ 2 (CMPLX)

+Bước 2: Nhập $(2+i)(1-i) + 3i$

+Bước 3: Ấn dấu “=”. Được kết quả như hình bên

+Bước 4: Vì tính Môđun nên ta ấn tiếp **Shift + hyp**

(Abs) (phím giá trị tuyệt đối) + **Ans** (kết quả $3+2i$ ở trên)

+ Bước 5: Ấn dấu “=”. Kết quả như hình bên

Ví dụ 4: Tìm các số thực x, y thỏa mãn:

$$3x + y + 5xi = 2y - 1 + (x - y)i$$

Giải:

Theo giả thiết: $3x + y + 5xi = 2y - 1 + (x - y)i$

$$\Leftrightarrow (3x + y) + (5x)i = (2y - 1) + (x - y)i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 2y - 1 \\ 5x = x - y \end{cases} \text{ Giải hệ này ta được: } \begin{cases} x = -\frac{1}{7} \\ y = \frac{4}{7} \end{cases}$$

Ví dụ 5: Tính:

$$i^{109} + i^{27} + i^{24} - i^{38}$$

Giải:

Để tính toán bài này, ta chú ý đến định nghĩa đơn vị ảo để từ đó suy ra lũy thừa của đơn vị ảo như sau:

$$\text{Ta có: } i^2 = -1; i^3 = -i; i^4 = i^3 \cdot i = 1; i^5 = i; i^6 = -1 \dots$$

Bằng quy nạp dễ dàng chứng minh được:

Với $n \in \mathbb{N}$, ta có:

$$i^n = \begin{cases} 1 & \text{nếu } n = 4k \ (k \in \mathbb{N}) \\ i & \text{nếu } n = 4k + 1 \ (k \in \mathbb{N}) \\ -1 & \text{nếu } n = 4k + 2 \ (k \in \mathbb{N}) \\ -i & \text{nếu } n = 4k + 3 \ (k \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

Nếu n nguyên âm, $i^n = (i^{-1})^{-n} = \left(\frac{1}{i}\right)^{-n} = (-i)^{-n}$.

Như vậy theo kết quả trên, ta dễ dàng tính được:

$$i^{109} + i^{27} + i^{24} - i^{38} = i^{4 \cdot 27 + 1} + i^{4 \cdot 6 + 3} + i^{4 \cdot 6} - i^{4 \cdot 9 + 2} = i - i + 1 + 1 = 2$$

Ví dụ 6: Tính số phức sau:

$$z = (1+i)^{15}$$

Giải: Ta có: $(1+i)^2 = 1 + 2i - 1 = 2i \Rightarrow (1+i)^{14} = (2i)^7 = 128 \cdot i^7 = -128i$

$$z = (1+i)^{15} = (1+i)^{14}(1+i) = -128i(1+i) = -128(-1+i) = 128 - 128i.$$

Với bài toán trắc nghiệm ta có thể sử dụng máy tính để tìm đáp án như sau

+**Bước 1:** Ấn MODE $\rightarrow$ 2 (CMPLX)

+**Bước 2:** Nhập $(1+i)^{15}$

+**Bước 3:** Ấn dấu “=” ta được kết quả là $128 - 128i$. Vậy $z = 128 - 128i$

Ví dụ 7: Tính số phức sau: $z = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{16} + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^8$

Giải:

$$\text{Ta có: } \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{2} = \frac{2i}{2} = i$$

$$\Rightarrow \frac{1-i}{1+i} = -i. \text{ Vậy } \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{16} + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^8 = i^{16} + (-i)^8 = 2$$

Với bài toán trắc nghiệm ta có thể sử dụng máy tính để tìm đáp án như sau

+**Bước 1:** Ấn MODE $\rightarrow$ 2 (CMPLX)

+**Bước 2:** Nhập $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{16} + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^8$

+**Bước 3:** Ấn dấu “=” ta được kết quả là 2. Vậy $z = 2$

4.2.2. Các bài toán chứng minh.

Trong dạng này ta gặp các bài toán chứng minh một tính chất, hoặc một đẳng thức về số phức.

Để giải các bài toán dạng trên, ta áp dụng các tính chất của các phép toán cộng, trừ, nhân, chia, số phức liên hợp, môđun của số phức đã được chứng minh.

Ví dụ 1: Cho $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

$$\text{CMR: } E = z_1 \bar{z_2} + \bar{z_1} z_2 \in \mathbb{R}$$

Để giải bài toán này ta sử dụng một tính chất quan trọng của số phức liên hợp đó là: $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$

Thật vậy: Giả sử $z = x + yi \Rightarrow \bar{z} = x - yi$.

$$z = \bar{z} \Leftrightarrow x + yi = x - yi \Leftrightarrow y = 0 \Rightarrow z = x \in \mathbb{R}$$

Giải bài toán trên:

$$\text{Ta có } \overline{E} = \overline{z_1 z_2 + z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1 z_2} + \overline{z_1 z_2} = E \Rightarrow E \in \mathbb{R}$$

Ví dụ 2: Chứng minh rằng:

$$E_1 = (2 + i\sqrt{5})^7 + (2 - i\sqrt{5})^7 \in \mathbb{R}$$

$$E_2 = \left(\frac{19+7i}{9-i}\right)^n + \left(\frac{20+5i}{7+6i}\right)^n \in \mathbb{R}$$

Giải:

$$1) \text{ Ta có: } \overline{E_1} = \overline{(2+i\sqrt{5})^7 + (2-i\sqrt{5})^7} = \overline{(2+i\sqrt{5})^7} + \overline{(2-i\sqrt{5})^7} = (2-i\sqrt{5})^7 + (2+i\sqrt{5})^7 = E_1 \\ \Rightarrow E_1 \in \mathbb{R}$$

$$2) E_2 = \left(\frac{19+7i}{9-i}\right)^n + \left(\frac{20+5i}{7+6i}\right)^n = \left(\frac{(19+7i)(9+i)}{82}\right)^n + \left(\frac{(20+5i)(7-6i)}{85}\right)^n \\ = \left(\frac{164+82i}{82}\right)^n + \left(\frac{170-85i}{85}\right)^n = (2+i)^n + (2-i)^n \\ \Rightarrow \overline{E_2} = E_2 \Rightarrow E_2 \in \mathbb{R}$$

Ví dụ 3: Cho $z \in \mathbb{C}$.

$$\text{CMR: } |z+1| \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ hoặc } |z^2+1| \geq 1$$

Giải:

$$\text{Ta chứng minh bằng phản chứng: Giả sử } \begin{cases} |z+1| < \frac{1}{\sqrt{2}} \\ |z^2+1| < 1 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } z = a+bi \Rightarrow z^2 = a^2 - b^2 + 2abi$$

$$\begin{cases} |z+1| < \frac{1}{\sqrt{2}} \\ |z^2+1| < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1+a)^2 + b^2 < \frac{1}{2} \\ (1+a^2-b^2)^2 + 4a^2b^2 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(a^2+b^2)+4a+1 < 0 \\ (a^2+b^2)^2 + 2(a^2-b^2) < 0 \end{cases}$$

Cộng hai bất đẳng thức trên ta được: $(a^2+b^2)^2 + (2a+1)^2 < 0 \Rightarrow$ vô lý $\Rightarrow$ đpcm

4.2.3. Các bài toán về môđun của số phức và biểu diễn hình học của số phức.

Trong dạng này, ta gặp các bài toán biểu diễn hình học của số phức hay còn gọi là tìm tập hợp điểm biểu diễn một số phức z trong đó số phức z thỏa mãn một hệ thức nào đó (thường là hệ thức liên quan đến môđun của số phức). Khi đó ta giải bài toán này như sau:

Giả sử $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Khi đó số phức z biểu diễn trên mặt phẳng phức bởi điểm $M(x; y)$. Ta có: $OM = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$

Sử dụng dữ kiện của đề bài để tìm mối liên hệ giữa x và y từ đó suy ra tập hợp điểm M .

Lưu ý:

- Với số thực dương R , tập hợp các số phức với $|z| = R$ biểu diễn trên mặt phẳng phức là đường tròn tâm O , bán kính R .
- Các số phức z , $|z| < R$ là các điểm nằm trong đường tròn $(O; R)$
- Các số phức z , $|z| > R$ là các điểm nằm ngoài đường tròn $(O; R)$

Ví dụ 1: Giả sử $M(z)$ là điểm trên mặt phẳng phức biểu diễn số phức z . Tìm tập hợp các điểm $M(z)$ thỏa mãn một trong các điều kiện sau đây:

- 1) $|z - 1 + i| = 2$
- 2) $|2 + z| = |1 - i|$
- 3) $|z - 4i| + |z + 4i| = 10$
- 4) $|2 + z| > |z - 2|$
- 5) $1 \leq |z + 1 - i| \leq 2$

Giải: 1) Xét hệ thức: $|z - 1 + i| = 2$ (1)

Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow z - 1 + i = (x - 1) + (y + 1)i$.

Khi đó (1) $\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} = 2$

$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4 \Rightarrow$ Tập hợp các điểm M trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn số phức z thỏa mãn (1) là đường tròn có tâm tại $I(1; -1)$ và bán kính $R = 2$.

2) Xét hệ thức $|2 + z| = |z - i|$ (2)

$$(2) \Leftrightarrow |z - (-2)| = |z - i| (*)$$

Gọi A là điểm biểu diễn số -2 , còn B là điểm biểu diễn số phức i ($A(-2; 0); B(0; 1)$)

Đẳng thức (*) chứng tỏ $MA = MB$.

Vậy tập hợp tất cả các điểm M chính là đường trung trực của AB .

Chú ý: Ta có thể giải cách khác như sau:

Giả sử $z = x + yi$, khi đó:

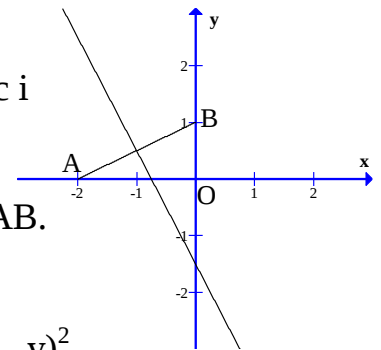
$$(2) \Leftrightarrow |(x+2) + yi| = |-x + (1-y)i| \Leftrightarrow (x+2)^2 + y^2 = x^2 + (1-y)^2$$

$$\Leftrightarrow 4x + 2y + 3 = 0.$$

Vậy tập hợp các điểm M là đường thẳng $4x + 2y + 3 = 0$.

Nhận xét: Đường thẳng $4x + 2y + 3 = 0$ chính là phương trình đường trung trực của đoạn AB .

3) Xét hệ thức: $|z - 4i| + |z + 4i| = 10$ (3)



Xét F_1, F_2 tương ứng biểu diễn các điểm $4i$ và $-4i$ tức là $F_1(0;4)$ và $F_2(0;-4)$. Do đó: $(3) \Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 10$

Ta có $F_1F_2 = 8 \Rightarrow$ Tập hợp tất cả các điểm M nằm trên (E) có hai tiêu điểm là F_1 và F_2 và có độ dài trục lớn bằng 10.

Phương trình của (E) là: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$

4) Xét: $|2+z| > |z-2|$ (4)

Giả sử $z = x + yi$, khi đó:

(4) $\Leftrightarrow |2+x+yi| > |x+yi-2|$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 + y^2 > (x-2)^2 + y^2 \Leftrightarrow x > 0.$$

$\Rightarrow$ Tập hợp các điểm M là nửa mặt phẳng ở bên phải trục tung, tức là các điểm $(x;y)$ mà $x > 0$.

Nhận xét: Ta có thể giải cách khác như sau:

$$(4) \Leftrightarrow |z - (-2)| > |z - 2|$$

Gọi A, B tương ứng là các điểm biểu diễn số thực -2 và 2 , tức là $A(-2;0), B(2;0)$.

Vậy (4) $\Leftrightarrow MA > MB$. Mà A, B đối xứng nhau qua Oy .

Từ đó suy ra tập hợp các điểm M là nửa mặt phẳng ở bên phải trục tung.

5) Xét hệ thức $1 \leq |z+1-i| \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq |z-(-1+i)| \leq 2$.

Xét điểm $A(-1;1)$ là điểm biểu diễn số phức $-1+i$. Khi đó $1 \leq MA \leq 2$.

Vậy tập hợp các điểm M là hình vành khăn có tâm tại $A(-1;1)$ và các bán kính lớn và nhỏ lần lượt là 2 và 1

Cách 2: Giả sử $z = x + yi$ khi đó (5) $\Leftrightarrow 1 \leq |(x+1) + (y-1)i| \leq 2$
 $\Leftrightarrow 1 \leq (x+1)^2 + (y-1)^2 \leq 4$

$\Rightarrow$ kết quả như ở trên.

Ví dụ 2: Xác định các điểm nằm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z thoả mãn một trong các điều kiện sau đây:

1) $|z + \bar{z} + 3| = 4$

2) $|z+1-i| = |z-1+2i|$.

3) $2|z-i| = |z-\bar{z}+2i|$

4) $|z^2 - \bar{z}^2| = 4$

Giải:

1) Xét hệ thức: $|z + \bar{z} + 3| = 4$ (1)

Đặt $x = x + yi \Rightarrow \bar{z} = x - yi$, do đó

(1) $\Leftrightarrow |(x+yi)+(x-yi)+3|=4$

$$\Leftrightarrow |2x+3|=4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{7}{2} \end{cases}$$

Vậy tập hợp tất cả các điểm M là hai đường thẳng song song với trục tung $x = \frac{1}{2}$ và $x = -\frac{7}{2}$

2) Vì đề bài yêu cầu tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z nên ta đặt $z = x + yi$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } |z+1-i| &= |z-1+2i| \Leftrightarrow |x+1+(y-1)i| = |x-1+(y+2)i| \\ \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 &= (x-1)^2 + (y+2)^2 \Leftrightarrow 4x-6y-3=0. \end{aligned}$$

3) Xét hệ thức $2|z-i| = |z-\bar{z}+2i|$.

$$\begin{aligned} \text{Đặt } z = x + yi \Rightarrow \bar{z} &= x - yi. \text{ Khi đó: } (3) \Leftrightarrow |x+(y-1)i| = |(x+y)i| \\ \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 &= (x+y)^2 \Leftrightarrow x^2 - 4y = 0 \Leftrightarrow y = \frac{x^2}{4}. \end{aligned}$$

Vậy tập hợp các điểm M là parabol $y = \frac{x^2}{4}$

4) Xét hệ thức: $|z^2 - \bar{z}^2| = 4$

$$\text{Đặt } z = x + yi \Rightarrow \bar{z} = x - yi. \text{ Khi đó: } (4) \Leftrightarrow |4xyi| = 4 \Leftrightarrow 16x^2y^2 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 1 \\ xy = -1 \end{cases}$$

Vậy tập hợp các điểm M là hai nhánh (H) $xy = 1$ và $xy = -1$

Ví dụ 3: Tìm số phức z thỏa mãn hệ:
$$\begin{cases} \left| \frac{z-1}{z-i} \right| = 1 \\ \left| \frac{z-3i}{z+i} \right| = 1 \end{cases}$$

Giải: Giả sử $z = x + yi$, khi đó $\left| \frac{z-1}{z-i} \right| = 1 \Leftrightarrow |z-1| = |z-i| \Leftrightarrow |x+yi-1| = |x+yi-i|$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = x^2 + (y-1)^2 \Leftrightarrow x=y.$$

Ta lại có: $\left| \frac{z-3i}{z+i} \right| = 1 \Leftrightarrow |z-3i| = |z+i| \Leftrightarrow |x+yi-3i| = |x+yi+i|$

$$\Leftrightarrow x^2 + (y-3)^2 = x^2 + (y+1)^2$$

$$\Leftrightarrow y = 1 \Rightarrow x = 1. \text{ Vậy số phức phải tìm là } z = 1+i$$

Ví dụ 4: Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện: $|z-2+3i| = \frac{3}{2}$

Tìm số phức z có môđun nhỏ nhất.

Giải: Giả sử $z = x + yi$, khi đó: $|z-2+3i| = \frac{3}{2} \Leftrightarrow |(x-2) + (y+3)i| = \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow$ Tập hợp điểm M thỏa mãn điều kiện đã cho là đường tròn tâm I(2;-3) và bán kính 3/2.

Môđun của z đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi M thuộc đường tròn và gần O nhất $\Rightarrow$ M trùng với M_1 là giao của đường thẳng OI với đường tròn.

Ta có: $OI = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

Kẻ $M_1H \perp Ox$. Theo định lý Talet ta có:

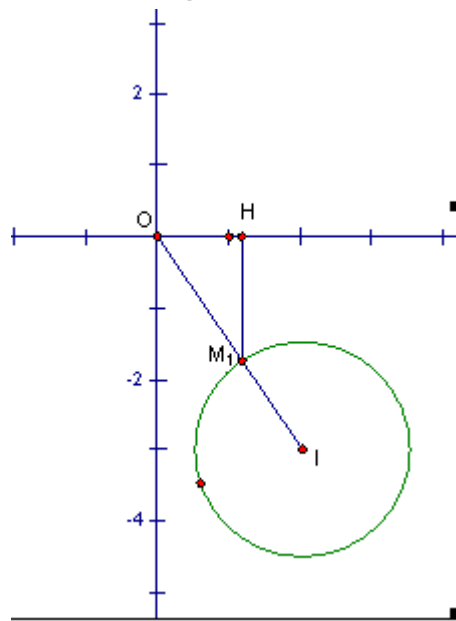
$$\frac{M_1H}{3} = \frac{OM_1}{OI} = \frac{\sqrt{13} - \frac{3}{2}}{\sqrt{13}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{13}M_1H = 3\sqrt{13} - \frac{9}{2} = \frac{6\sqrt{13} - 9}{2}$$

$$\Rightarrow M_1H = \frac{6\sqrt{13} - 9}{2\sqrt{13}} = \frac{78 - 9\sqrt{13}}{26}$$

Lại có: $\frac{OH}{2} = \frac{\sqrt{13} - \frac{3}{2}}{\sqrt{13}} \Rightarrow OH = \frac{26 - 3\sqrt{13}}{13}$

Vậy số phức cần tìm là: $z = \frac{26 - 3\sqrt{13}}{13} + \frac{78 - 9\sqrt{13}}{26}i$



Ví dụ 5: Cho $z_1 = 1+i$; $z_2 = -1-i$. Tìm $z_3 \in \mathbb{C}$ sao cho các điểm biểu diễn của z_1, z_2, z_3 tạo thành tam giác đều.

Giải:

Để giải bài toán này ta cần chú ý đến kiến thức sau:

Giả sử $M_1(x_1; y_1)$ biểu diễn số phức $z_1 = x_1 + y_1i$

Giả sử $M_2(x_2; y_2)$ biểu diễn số phức $z_2 = x_2 + y_2i$

Khi đó khoảng cách giữa hai điểm M_1M_2 bằng môđun của số phức $z_1 - z_2$.

Vậy: $M_1M_2 = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

Áp dụng vào bài toán:

Giả sử $z_3 = x + yi$

Để các điểm biểu diễn của z_1, z_2, z_3 tạo thành một tam giác đều thì

$$\begin{cases} |z_1 - z_2| = |z_1 - z_3| \\ |z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4+4} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} \\ \sqrt{4+4} = \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = 8 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2y^2 = 6 \Rightarrow y = \pm\sqrt{3} \Rightarrow x = \mp\sqrt{3}$$

Vậy có hai số phức thỏa mãn là: $z_3 = \sqrt{3}(1+i)$ và $z_3 = -\sqrt{3}(1-i)$

4.2.4. Tìm căn bậc hai của một số phức.

Cho số phức $w = a + bi$. Tìm căn bậc hai của số phức này.

Phương pháp:

+) Nếu $w = 0 \Rightarrow w$ có một căn bậc hai là 0

+) Nếu $w = a > 0$ ($a \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow w$ có hai căn bậc hai là $\sqrt{a}$ và $-\sqrt{a}$

+) Nếu $w = a < 0$ ($a \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow w$ có hai căn bậc hai là $i\sqrt{|a|}$ và $-i\sqrt{|a|}$.

+) Nếu $w = a + bi$ ($b \neq 0$)

Giả sử $z = x + yi$ (x, y thuộc $\mathbb{R}$) là một căn bậc hai của $w \Leftrightarrow z^2 = w$

$$\Leftrightarrow (x+yi)^2 = a + bi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

Để tìm căn bậc hai của w ta cần giải hệ này để tìm x, y . Mỗi cặp (x, y) nghiệm đúng phương trình đó cho ta một căn bậc hai của w .

Chú ý: Có rất nhiều cách để giải hệ này, sau đây là hai cách thường dùng để giải.

Cách 1: Sử dụng phương pháp thế: Rút x theo y từ phương trình (2) thế vào pt (1) rồi biến đổi thành phương trình trùng phương để giải.

Cách 2: Ta biến đổi hệ như sau:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - y^2)^2 = a^2 \\ (2xy)^2 = b^2 \\ 2xy = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ xy = b/2 \end{cases}$$

Từ hệ này, ta có thể giải ra x^2 và y^2 một cách dễ dàng, sau đó kết hợp với điều kiện $xy=b/2$ để xem xét x, y cùng dấu hay trái dấu từ đó chọn được nghiệm thích hợp.

Nhận xét: Mỗi số phức khác 0 có hai căn bậc hai là hai số đối nhau.

Ví dụ: Tìm các căn bậc hai của mỗi số phức sau:

1) $4 + 6\sqrt{5}i$

2) $-1 - 2\sqrt{6}i$

Giải:

1) Giả sử $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) là một căn bậc hai của $w = 4 + 6\sqrt{5}i$

$$\text{Khi đó: } z^2 = w \Leftrightarrow (x+yi)^2 = 4 + 6\sqrt{5}i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 4 \\ 2xy = 6\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3\sqrt{5}}{x} & (1) \\ x^2 - \frac{45}{x^2} = 4 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow x^4 - 4x^2 - 45 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3.$$

$$x = 3 \Rightarrow y = \sqrt{5}$$

$$x = -3 \Rightarrow y = -\sqrt{5}$$

Vậy số phức $w = 4 + 6\sqrt{5}i$ có hai căn bậc hai là: $z_1 = 3 + \sqrt{5}i$ và $z_2 = -3 - \sqrt{5}i$

2) Giả sử $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) là một căn bậc hai của $w = -1 - 2\sqrt{6}i$

Khi đó: $z^2 = w \Leftrightarrow (x+yi)^2 = -1-2\sqrt{6}i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -1 \\ 2xy = -2\sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{-\sqrt{6}}{x} \\ x^2 - \frac{6}{x^2} = -1 \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

$$(2) \Leftrightarrow x^4 + x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{2}.$$

$$x = \sqrt{2} \Rightarrow y = -\sqrt{3}$$

$$x = -\sqrt{2} \Rightarrow y = \sqrt{3}$$

Vậy số phức $w = 4 + 6\sqrt{5}i$ có hai căn bậc hai là: $z_1 = \sqrt{2} - \sqrt{3}i$ và $z_2 = -\sqrt{2} + \sqrt{3}i$

4.2.5. Giải phương trình bậc hai.

Cho phương trình bậc hai: $Az^2 + Bz + C = 0$ (1) ($A, B, C \in \mathbb{C}, A \neq 0$)

Phương pháp:

$$\text{Tính } \Delta = B^2 - 4AC$$

*) Nếu $\Delta \neq 0$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $z_1 = \frac{-B+\delta}{2A}, z_2 = \frac{-B-\delta}{2A}$

(trong đó δ là một căn bậc hai của Δ).

*) Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình (1) có nghiệm kép: $z_1 = z_2 = -\frac{B}{2A}$

Ví dụ: Giải các phương trình bậc hai sau:

$$1) z^2 + 2z + 5 = 0$$

$$2) z^2 + (1-3i)z - 2(1+i) = 0$$

Giải:

1) Xét phương trình: $z^2 + 2z + 5 = 0$

Ta có: $\Delta = -4 = 4i^2 \Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm: $z_1 = -1 + 2i$ và $z_2 = -1 - 2i$.

2) Ta có: $\Delta = (1-3i)^2 + 8(1+i) = 2i$.

Bây giờ ta phải tìm các căn bậc hai của $2i$.

1) Giả sử $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) là một căn bậc hai của $w = 2i$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ x^2 - \frac{1}{x^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Vậy số phức $2i$ có hai căn bậc hai là: $1+i$ và $-1-i$

$$\Rightarrow \text{Phương trình có hai nghiệm là: } z_1 = \frac{3i-1+1+i}{2} = 2i$$

$$z_2 = \frac{3i-1-1-i}{2} = -1+i$$

Nhận xét: Ngoài phương pháp tìm căn bậc hai như ở trên, đối với nhiều bài ta có thể phân tích Δ thành bình phương của một số phức. Chẳng hạn: $2i = i^2 + 2i + 1 = (i+1)^2$ từ đó dễ dàng suy ra hai căn bậc hai của $2i$ là $1+i$ và $-1-i$.

4.2.6. Phương trình quy về bậc hai

Đối với dạng này ta thường gặp phương trình bậc 3 hoặc phương trình bậc 4 dạng đặc biệt có thể quy được về bậc hai.

Đối với phương trình bậc 3 (hoặc cao hơn), về nguyên tắc ta cố gắng phân tích về trái thành nhân tử (để đưa về phương trình tích) từ đó dẫn đến việc giải phương trình bậc nhất và bậc hai.

Đối với một số phương trình khác, ta có thể đặt ẩn phụ để quy về phương trình bậc hai mà ta đã biết cách giải.

4.2.6.1. Phương pháp phân tích thành nhân tử.

Ví dụ 1: Cho phương trình sau:

$$z^3 + (2-2i)z^2 + (5-4i)z - 10i = 0 \quad (1)$$

a) Chứng minh rằng (1) nhận một nghiệm thuần ảo.

b) Giải phương trình (1).

Giải:

a) Đặt $z = yi$ với $y \in \mathbb{R}$

Phương trình (1) có dạng: $(iy)^3 + (2i-2)(yi)^2 + (5-4i)(yi) - 10i = 0$

$$\Leftrightarrow -iy^3 - 2y^2 + 2iy^2 + 5iy + 4y - 10i = 0 = 0 + 0i$$

đồng nhất hoá hai vế ta được:

$$\begin{cases} -2y^2 + 4y = 0 \\ -y^3 + 2y^2 + 5y - 10 = 0 \end{cases} \quad \text{giải hệ này ta được nghiệm duy nhất } y = 2$$

Vậy phương trình (1) có nghiệm thuần ảo $z = 2i$.

b) Vì phương trình (1) nhận nghiệm $2i$

$\Rightarrow$ về trái của (1) có thể phân tích dưới dạng:

$$z^3 + (2-2i)z^2 + (5-4i)z - 10i = (z-2i)(z^2 + az + b) \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

đồng nhất hoá hai vế ta giải được $a = 2$ và $b = 5$.

$$\Rightarrow (1) \Leftrightarrow (z-2i)(z^2 + 2z + 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2i \\ z^2 + 2z + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2i \\ z = -1-2i \\ z = -1+2i \end{cases}$$

Vậy phương trình (1) có 3 nghiệm.

Ví dụ 2: Giải các phương trình:

$$1) z^3 - 27 = 0$$

$$2) z^3 = 18 + 26i, \text{ trong đó } z = x + yi; x, y \in \mathbb{Z}$$

Giải:

$$1) z^3 - 27 = 0 \Leftrightarrow (z-1)(z^2 + 3z + 9) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ z^2 + 3z + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ z_{2,3} = \frac{-3 \pm 3\sqrt{3}i}{2} \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm.

2) Ta có: $(x + yi)^3 = x^3 - 3xy^2 + (3x^2y - y^3)i = 18 + 26i$

Theo định nghĩa hai số phức bằng nhau, ta được:
$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 18 \\ 3x^2y - y^3 = 26 \end{cases}$$

Từ hệ trên, rõ ràng $x \neq 0$ và $y \neq 0$.

Đặt $y = tx$, hệ $\Rightarrow 18(3x^2y - y^3) = 26(x^3 - 3xy^2)$

$\Rightarrow 18(3t - t^3) = 26(1 - 3t^2) \Leftrightarrow 18t^3 - 78t^2 - 54t + 26 = 0 \Leftrightarrow (3t - 1)(3t^2 - 12t - 13) = 0$.

Vì $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow t \in \mathbb{Q} \Rightarrow t = 1/3 \Rightarrow x = 3$ và $y = 1 \Rightarrow z = 3 + i$.

Ví dụ 3:

1) Tìm các số thực a, b để có phân tích: $z^3 + 3z^2 + 3z - 63 = (z - 3)(z^2 + az + b)$

2) Giải phương trình: $z^3 + 3z^2 + 3z - 63 = 0$

Giải:

1) Giả thiết $\Leftrightarrow z^3 + 3z^2 + 3z - 63 = z^3 + (a-3)z^2 + (b-3a)z - 3b$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - 3 = 3 \\ b - 3a = 3 \\ 3b = 63 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 21 \end{cases}$$

2) Áp dụng phần 1) ta có: $z^3 + 3z^2 + 3z - 63 = 0 \Leftrightarrow (z - 3)(z^2 + 6z + 21) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 3 \\ z = -3 + 2\sqrt{3}i \\ z = -3 - 2\sqrt{3}i \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm.

Ví dụ 4: Giải phương trình:

$$z^4 - 4z^3 + 7z^2 - 16z + 12 = 0 \quad (1)$$

Giải:

Do tổng tất cả các hệ số của phương trình (1) bằng 0 nên (1) có nghiệm $z = 1$.

(1) $\Leftrightarrow (z - 1)(z^3 - 3z^2 + 4z - 12) = 0$

$\Leftrightarrow (z - 1)(z - 3)(z^2 + 4) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ z = 3 \\ z^2 + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ z = 3 \\ z = 2i \\ z = -2i \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm.

4.2.6.2 Phương pháp đặt ẩn phụ.

Ví dụ 1: Giải phương trình:

$$(z^2 + z)^2 + 4(z^2 + z) - 12 = 0$$

Giải:

Đặt $t = z^2 + z$, khi đó phương trình đã cho có dạng:

$$t^2 + 4t - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -6 \\ t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 + z - 6 = 0 \\ z^2 + z - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{-1 + \sqrt{23}i}{2} \\ z = \frac{-1 - \sqrt{23}i}{2} \\ z = 1 \\ z = -2 \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm.

Ví dụ 2: Cho phương trình: $z^4 - 2z^3 - z^2 - 2z + 1 = 0$ (1)

Bằng cách đặt $y = z + \frac{1}{z}$ hãy đưa phương trình về dạng: $y^2 - 2y - 3 = 0$.

Từ đó giải (1)

Giải:

Do $z = 0$ không là nghiệm của (1) $\Rightarrow$ chia hai vế của phương trình cho z^2 ta được:

$$z^2 - 2z - 1 - 2\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 0.$$

$$\text{Đặt } y = z + \frac{1}{z} \Rightarrow \text{phương trình có dạng: } y^2 - 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$\text{Với } y = -1 \Rightarrow z + \frac{1}{z} = -1 \Leftrightarrow z = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Với } y = 3 \Rightarrow z + \frac{1}{z} = 3 \Leftrightarrow z = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm

Ví dụ 3: Giải phương trình:

$$(z^2 + 3z + 6)^2 + 2z(z^2 + 3z + 6) - 3z^2 = 0$$

Giải:

Đặt $t = z^2 + 3z + 6$ phương trình đã cho có dạng:

$$t^2 + 2zt - 3z^2 = 0 \Leftrightarrow (t - z)(t + 3z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = z \\ t = -3z \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } t = z \Leftrightarrow z^2 + 3z + 6 - z = 0 \Leftrightarrow z^2 + 2z + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = -1 + \sqrt{5}i \\ z = -1 - \sqrt{5}i \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } t = -3z \Leftrightarrow z^2 + 3z + 6 + 3z = 0 \Leftrightarrow z^2 + 6z + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = -3 + \sqrt{3} \\ z = -3 - \sqrt{3} \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm.

Ví dụ 4: Giải phương trình:

$$z^4 - z^3 + \frac{z^2}{2} + z + 1 = 0 \quad (1)$$

Giải:

Do $z = 0$ không phải là nghiệm của phương trình (1) nên:

$$(1) \Leftrightarrow z^2 - z + \frac{1}{2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 0 \Leftrightarrow (z - \frac{1}{z})^2 - (z - \frac{1}{z}) + \frac{5}{2} = 0.$$

$$\text{Đặt } y = z - \frac{1}{z} \Rightarrow \text{pt có dạng: } y^2 - y + \frac{5}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2y^2 - 2y + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1+3i}{2} \\ y = \frac{1-3i}{2} \end{cases}$$

$$+) \text{ Với } y = \frac{1+3i}{2} \Rightarrow z - \frac{1}{z} = \frac{1+3i}{2} \Leftrightarrow 2z^2 - (1+3i)z - 2 = 0 \quad (2)$$

$$\text{Ta có : } \Delta = (1+3i)^2 + 16 = 8 + 6i = (3+i)^2$$

$\Rightarrow$ phương trình (2) có 2 nghiệm: $z_1 = 1+i$

$$z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$+) \text{ Với } y = \frac{1-3i}{2} \Rightarrow z - \frac{1}{z} = \frac{1-3i}{2} \Leftrightarrow 2z^2 - (1-3i)z - 2 = 0 \quad (3)$$

$$\text{Ta có : } \Delta = (1-3i)^2 + 16 = 8 - 6i = (3-i)^2$$

$\Rightarrow$ phương trình (3) có 2 nghiệm: $z_3 = 1-i$

$$z_4 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm.

4.2.7. Giải hệ phương trình phức.

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình 2 ẩn z và w :

$$\begin{cases} z + w = 3(1+i) & (1) \\ z^3 + w^3 = 9(-1+i) & (2) \end{cases}$$

Giải:

$$\text{Từ (2) ta có: } (z + w)^3 - 3zw(z + w) = 9(-1+i) \quad (3)$$

$$\text{Thay (1) vào (3) ta được: } 27(1+i)^3 - 9zw(1+i) = 9(-1+i)$$

$$\Rightarrow 3(1+3i+3i^2+i^3) - zw(1+i) = -1+i$$

$$\Rightarrow zw = \frac{-5+5i}{1+i} = 5i$$

Vậy ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} z+w=3(1+i) \\ z.w=5i \end{cases}$$

Theo định lý Viet $\Rightarrow z, w$ là các nghiệm của phương trình: $t^2 - 3(1+i)t + 5i = 0$ (4)

Ta có: $\Delta = -2i = (1-i)^2$

$\Rightarrow$ Phương trình (4) có hai nghiệm
$$\begin{cases} t = 2+i \\ t = 1+2i \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm $(z;w)$ là $(2+i; 1+2i)$ và $(1+2i; 2+i)$

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình 3 ẩn :

$$\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = 1 & (1) \\ z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 = 1 & (2) \\ z_1 z_2 z_3 = 1 & (3) \end{cases}$$

Giải:

Ta có z_1, z_2, z_3 là các nghiệm của phương trình: $(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) = 0$

$$\Leftrightarrow z^3 - (z_1 + z_2 + z_3)z^2 + (z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1)z - z_1 z_2 z_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow z^3 - z^2 + z - 1 = 0 \Leftrightarrow z = 1 \text{ và } z = \pm i$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 6 nghiệm (là hoán vị của bộ ba số 1, i và -i)

4.3. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: (Đề minh họa 2017) Cho hai số phức $z_1 = 1+i$ và $z_2 = 2-3i$. Tính môđun của số phức $z_1 + z_2$

A. $|z_1 + z_2| = \sqrt{13}$. **B.** $|z_1 + z_2| = \sqrt{5}$. **C.** $|z_1 + z_2| = 1$. **D.** $|z_1 + z_2| = 5$

Câu 2: (Đề minh họa 2017) Cho số phức $z = 2+5i$. Tìm số phức $w = iz + \bar{z}$.

A. $w = 7-3i$. **B.** $w = -3-3i$. **C.** $w = 3+7i$. **D.** $w = -7-7i$.

Câu 3: Cho số phức $z = \frac{3-5i}{1+4i} + (5-2i)(-3-i)$. Trong các khẳng định sau, khẳng định đúng là

- A.** Phần thực bằng -18 và Phần ảo bằng 0i.
B. Phần thực bằng 18 và Phần ảo bằng 0i.
C. Phần thực bằng 18 và Phần ảo bằng 0.
D. Phần thực bằng -18 và Phần ảo bằng 0.

Câu 4: Cho số phức $z = (2-3i)(1+2i)^2$. Môđun của z bằng

A. $5\sqrt{13}$. **B.** $3\sqrt{13}$. **C.** $\sqrt{13}$. **D.** $2\sqrt{13}$.

Câu 5: Cho số phức z thỏa mãn: $z = \frac{(3-2i)[(4+3i)-(1+2i)]}{5-4i}$. Số phức $\bar{z}$ bằng

A. $\frac{67}{41} - \frac{29}{41}$. B. $\frac{67}{41} - \frac{29}{41}i$. C. $\frac{67}{41} + \frac{29}{41}i$. D. $-\frac{67}{41} - \frac{29}{41}i$

Câu 6: Cho số phức z thỏa mãn $z = (3+2i)(2-3i) + (1+i)^2 - 8$. Điểm biểu diễn số phức trong mặt phẳng phức có tọa độ là

A. $(-4; -3)$. B. $(4; -3)$. C. $(4; 3)$. D. $(-4; 3)$.

Câu 7: Cho $z_1 = 3+i$, $z_2 = 2-i$. Giá trị $|z_1 + z_1 z_2|$ bằng

A. 2 . B. 10 . C. 6 . D. 4 .

Câu 8: Giá trị $A = i^{2014} + i^{2015} + i^{2016}$ bằng

A. i . B. $2i$. C. 0 . D. $-i$.

Câu 9: Cho số phức $z = a+bi$. Khi đó $z + \bar{z}$ có kết quả là

A. $2a$. B. $2a+2bi$. C. $2bi$. D. 0 .

Câu 10: Cho số phức $z = a+bi$. Khi đó, $z\bar{z}$ có kết quả là:

A. $-2ab$. B. $2ab$. C. $a^2 + b^2$. D. $a^2 - b^2$.

Câu 11: Số thực x, y thỏa mãn điều kiện $x+2y-2yi+3=3x+2y+(x+y)i$ là

A. $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$.

Câu 12: Trong tập số phức (C), căn bậc hai của số phức $z = -4i$ là:

A. $\pm 2(1-i)$. B. $\pm \sqrt{2}(1+i)$.
C. $\pm \sqrt{2}(1-i)$. D. không có căn bậc hai.

Câu 13: Trong tập số phức (C), căn bậc hai của số phức $z = -8-6i$ là:

A. $\pm(1-3i)$. B. $\sqrt{10}$.
C. $\pm(1+3i)$. D. không có căn bậc hai.

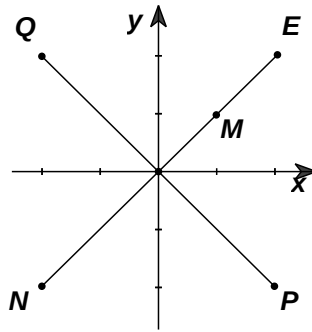
Câu 14: (30 – 101 – THPTQG 2017) Cho số phức $z = 1-2i$. Điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn của số phức $w = iz$ trên mặt phẳng tọa độ?

A. $Q(1; 2)$. B. $N(2; 1)$. C. $M(1; -2)$. D. $P(-2; 1)$.

Câu 15: (14 – 103 – THPTQG 2017) Tìm tất cả các số thực x, y sao cho $x^2 - 1 + yi = -1 + 2i$.

A. $x = -\sqrt{2}, y = 2$. B. $x = \sqrt{2}, y = 2$.
C. $x = 0, y = 2$. D. $x = \sqrt{2}, y = -2$.

Câu 16: Trên mặt phẳng tọa độ, điểm M là điểm biểu diễn số phức z (như hình vẽ bên). Điểm nào trong hình vẽ là điểm biểu diễn số phức $2z$?.



- A. Điểm N . B. Điểm Q . C. Điểm E . D. Điểm P .

Câu 17: Nếu số phức z thỏa mãn $|z|=1$ thì phần thực của $\frac{1}{1-z}$ bằng:

- A. $\frac{1}{2}$. B. $-\frac{1}{2}$.
C. 2. D. Một giá trị khác.

Câu 18: Cho hai số phức $z_1=1+i, z_2=2+3i$, tìm số phức $w=(z_1)^2 \cdot z_2$

- A. $w=6+4i$. B. $w=6-4i$. C. $w=-6-4i$. D. $w=-6+4i$

Câu 19: Cho số phức $z=(1+i)^2+(1+i)^3+\dots+(1+i)^{22}$. Phần thực của số phức z là:

- A. -2^{11} . B. $-2^{11}+2$. C. $-2^{11}-2$. D. 2^{11} .

Câu 20: Giá trị $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $(1-2i)x-(7-24i)y=-4+18i$

- A. $\begin{cases} x=-3 \\ y=1 \end{cases}$. B. $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$. C. $\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$. D. $\begin{cases} x=-3 \\ y=-1 \end{cases}$.

Câu 21: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $(1+i)(z-i)+2z=2i$. Mô-đun của số phức $w=\frac{\bar{z}-2z+1}{z^2}$ bằng

- A. 2. B. $\sqrt{5}$. C. $\sqrt{10}$. D. $2\sqrt{5}$.

Câu 22: Cho số phức z thỏa mãn $(2-i)\bar{z}-4=0$. Trong mặt phẳng phức, điểm biểu diễn số phức z có tọa độ

- A. $\left(-\frac{8}{5}; \frac{4}{5}\right)$. B. $\left(\frac{8}{5}; \frac{4}{5}\right)$. C. $\left(\frac{8}{5}; -\frac{4}{5}\right)$. D. $\left(-\frac{8}{5}; -\frac{4}{5}\right)$.

Câu 23: Gọi $z=a+bi$ là nghiệm của phương trình $(2-3i)z+(1-5i)=4-3i$. Giá trị $a-2b$ bằng

- A. 2. B. 1. C. -2. D. -1.

Câu 24: Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $2z^2-4z+3=0$. Giá trị $P=|z_1|+|z_2|$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. B. $2\sqrt{6}$. C. $\sqrt{5}$. D. $\sqrt{6}$.

Câu 25: Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $3z^2-4z+2=0$. Giá trị $P=|z_1|^2+|z_2|^2$ bằng

A. $\frac{2}{3}$. B. $\frac{4}{3}$. C. 6. D. $\sqrt{6}$.

Câu 26: Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 + 3z + 5 = 0$, z_1 có phần ảo dương. Giá trị $P = 2z_1 + z_2$ bằng

A. $-i\sqrt{11}$. B. $\frac{-9-i\sqrt{11}}{2}$. C. $\frac{-9+i\sqrt{11}}{2}$. D. -2.

Câu 27: Cho số phức z thỏa mãn $z^2 - 6z + 13 = 0$. Giá trị $\left|z + \frac{6}{z+i}\right|$.

A. $4\sqrt{5}$ hoặc 5. B. $2\sqrt{5}$ hoặc $\sqrt{17}$. C. $\sqrt{17}$ hoặc 5. D. $\sqrt{10}$ hoặc $\sqrt{5}$.

Câu 28: Nghiệm của phương trình $z^2 + 3(1+i)z + 5i = 0$ trên tập số phức là

A. $\begin{cases} z = -1-2i \\ z = -3+i \end{cases}$. B. $\begin{cases} z = 1+2i \\ z = -2-i \end{cases}$. C. $\begin{cases} z = -1-2i \\ z = -2-i \end{cases}$. D. $\begin{cases} z = 1+2i \\ z = -3+i \end{cases}$.

Câu 29: Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $2(1+i)z^2 - 4(2-i)z - 5 - 3i = 0$. Giá trị $|z_1|^2 + |z_2|^2$ bằng

A. 9. B. 5. C. 4. D. 8.

Câu 30: Gọi z_1, z_2, z_3, z_4 là bốn nghiệm của phương trình $z^4 - z^3 - 2z^2 + 6z - 4 = 0$ trên tập số phức, tổng: $S = \frac{1}{z_1^2} + \frac{1}{z_2^2} + \frac{1}{z_3^2} + \frac{1}{z_4^2}$?

A. $\frac{1}{4}$. B. $\frac{5}{4}$. C. $\frac{3}{2}$. D. $\frac{2}{3}$.

Câu 31: Gọi z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình: $z^2 - 4z + 5 = 0$. Giá trị $A = (z_1 - 1)^{2016} + (z_2 - 1)^{2016}$?

A. 2^{1008} . B. 2^{2016} . C. 2^{1009} . D. 2^{1010} .

Câu 32: Cho số phức z thỏa mãn $\bar{z} + (2-i)z - 1 + 3i = 0$. Mô-đun của số phức $w = 2z - 3 + 3i$ bằng ?

A. $|w| = 2\sqrt{2}$. B. $|w| = 2$. C. $|w| = \sqrt{2}$. D. $|w| = 4$.

Câu 33: Cho số phức z thỏa mãn $2z - 1 + i\bar{z} = 3 + 5i$. Mô-đun của số phức z là ?

A. $\sqrt{5}$. B. $\sqrt{3}$. C. 2. D. 5.

Câu 34: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = 1; |z_1 + z_2| = \sqrt{3}$. Giá trị $|z_1 - z_2|$ bằng ?

A. 2. B. $\sqrt{2}$. C. 1. D. $\sqrt{3}$.

Câu 35: (36-101-THPTQG 2017) Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $z + 1 + 3i - |z|i = 0$. Tính $S = a + 3b$

A. $S = \frac{7}{3}$. B. $S = -5$. C. $S = 5$. D. $S = -\frac{7}{3}$.

- Câu 36: (46-101-THPTQG 2017)** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z-3i|=5$ và $\frac{z}{z-4}$ là số thuần ảo?
A. 0. **B.** Vô số. **C.** 1. **D.** 2.
- Câu 37: (44-102-THPTQG 2017)** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z+2-i|=2\sqrt{2}$ và $(z-1)^2$ là số thuần ảo
A. 0. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2
- Câu 38: (38-103-THPTQG 2017)** Cho số phức z thỏa mãn $|z+3|=5$ và $|z-2i|=|z-2-2i|$. Tính $|z|$
A. $|z|=17$. **B.** $|z|=\sqrt{17}$. **C.** $|z|=\sqrt{10}$. **D.** $|z|=10$.
- Câu 39: (36-104-THPTQG 2017)** Cho số phức z thỏa mãn $|z|=5$ và $|z+3|=|z+3-10i|$. Tính số phức $w=z-4+3i$
A. $w=-3+8i$. **B.** $w=1+3i$. **C.** $w=-1+7i$. **D.** $w=-4+8i$.
- Câu 40:** Số nghiệm phương trình $z+|z|=0$
A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** Vô số.
- Câu 41:** Xét số phức $z=x+yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z+2|=|i-z|$. Khi đó z có mô đun nhỏ nhất thì giá trị $P=x^2+2y$ bằng bao nhiêu?
A. $-\frac{6}{25}$. **B.** $-\frac{4}{25}$. **C.** $\frac{6}{25}$. **D.** $\frac{4}{25}$.
- Câu 42:** Trong các số phức z thỏa mãn $|z|=|\bar{z}-3+4i|$, số phức có mô đun nhỏ nhất bằng bao nhiêu?
A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{7}{2}$.
- Câu 43:** Xét số phức z thỏa mãn $|z+i-1|=|\bar{z}-2i|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z|$ là?
A. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **B.** 1. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\frac{1}{4}$.
- Câu 44:** Cho số phức z thỏa mãn $|z-2i-1|=|\bar{z}-3|$. Gọi M là điểm biểu diễn cho số phức z để MA ngắn nhất với $A(2;4)$. Khi đó độ dài MA bằng bao nhiêu?
A. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **C.** $5\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{2}$.
- Câu 45:** Cho số phức z thỏa mãn $|z+i|=|z+1|$. Tìm GTNN của $|w|$ với $w=z+2i$.
A. $|w|=2$. **B.** $|w|=\sqrt{3}$. **C.** $|w|=1$. **D.** $|w|=\sqrt{2}$.
- Câu 46:** Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $w=(z+3-i)(\bar{z}+1+3i)$ là một số thực. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z|$ là?
A. $2\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $3\sqrt{3}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Câu 47: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-2i|=|z+2|$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+2i|+|z-5+9i|$.

- A. $\sqrt{70}$. B. $3\sqrt{10}$. C. $4\sqrt{5}$. D. $\sqrt{74}$.

Câu 48: Cho số phức z thỏa điều kiện $v=(z-i)(2+i)$ là một số thuần ảo. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z-2+3i|$

- A. $\frac{8\sqrt{5}}{5}$. B. $\frac{\sqrt{85}}{5}$. C. $\frac{64}{5}$. D. $\frac{17}{5}$.

Câu 49: Cho số phức z thỏa mãn $|z-2+2i|=1$. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $|z|$ lần lượt là:

- A. $2\sqrt{2}+1$ và $2\sqrt{2}-1$. B. $\sqrt{2}+1$ và $\sqrt{2}-1$. C. 2 và 1. D. $2\sqrt{3}+1$ và $2\sqrt{3}-1$.

Câu 50: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z-2+i|^2-|\bar{z}+1-4i|^2$, biết rằng số phức z thỏa mãn điều kiện $|z(i+1)+1+i|=\sqrt{2}$.

Tính M^2+n^2 .

- A. $M^2+n^2=200$. B. $M^2+n^2=20+12\sqrt{2}$.
C. $M^2+n^2=216$. D. $M^2+n^2=10+6\sqrt{2}$.

Câu 51: Tìm giá trị lớn nhất của $|z|$, biết rằng số phức z thỏa mãn điều kiện

$$\left| \frac{-2-3i}{3-2i}z+1 \right| = 1$$

- A. 1. B. 2. C. $\sqrt{2}$. D. 3.

Câu 52: Cho số phức z thỏa mãn: $\left| \frac{1+i}{1-i}z+2 \right| = 1$, đặt $m=\min|z|$; $M=\max|z|$, tìm

$$|m+iM|$$

- A. $|m+iM|=\sqrt{10}$. B. $|m+iM|=3\sqrt{2}$. C. $|m+iM|=10$. D. $|m+iM|=8$.

Câu 53: Cho số phức z thỏa mãn: $|z-\sqrt{3}-i|\leq 2$, gọi z_1 và z_2 lần lượt là số phức có môđun lớn nhất, nhỏ nhất. Giá trị của $|z_1-z_2|$ bằng.

- A. 4. B. $4\sqrt{3}$. C. $2\sqrt{3}$. D. 2.

Câu 54: [Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 5 năm 2017] Cho số phức z thỏa mãn $|z-4|+|z+4|=10$, giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của z lần lượt là:

- A. 10 và 4. B. 5 và 4. C. 4 và 3. D. 5 và 3.

Câu 55: Trong các số phức z thỏa mãn $|z-2|-|z+2|=2$, tìm số phức z có mô-đun nhỏ nhất

- A. $z=1-\sqrt{3}i$. B. $z=-1+\sqrt{3}i$. C. $z=1$. D. $z=\sqrt{3}+i$.

Câu 56: Trong các số phức z thỏa mãn $|z-3i|+|\bar{z}+3|=10$. Hai số phức z_1 và z_2 có mô-đun nhỏ nhất. Hỏi tích $z_1.z_2$ là bao nhiêu.

A. 25. B. -25. C. 16. D. -16.

Câu 57: (ĐHKH Huế Lần 1 – 2017) Cho ba số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ và $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $|z_1^2 + z_2^2 + z_3^2| = |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|$. B. $|z_1^2 + z_2^2 + z_3^2| < |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|$.

C. $|z_1^2 + z_2^2 + z_3^2| > |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|$. D. $|z_1^2 + z_2^2 + z_3^2| \neq |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|$.

Câu 58: (Chuyên ĐHSPT Hà Nội Lần 3-2017) Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = 1$. Khi đó $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2$ bằng

A. 2. B. 4. C. 1. D. 0.

Câu 59: (Sở Quảng Ninh-2017) Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn

$|z_1| = |z_2| = |z_1 - z_2| = 1$. Tính giá trị của biểu thức $P = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 + \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2$

A. $P = 1 - i$. B. $P = -1 - i$. C. $P = -1$. D. $P = 1 + i$.

Câu 60: Xét các số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z + 1| + |z^2 - z + 1|$. Giá trị của $M.m$ bằng

A. $3\sqrt{3}$. B. $\frac{13\sqrt{3}}{4}$. C. $\frac{13}{4}$. D. $\frac{39}{4}$.

Phần III: KẾT LUẬN VÀ KHUYẾN NGHỊ

1, Kết luận:

Trên đây là những bài toán mà tôi đúc rút kinh nghiệm trong quá trình giảng dạy của tôi ở trường THPT Hoài Đức A. Sau khi nghiên cứu và thực hiện giảng dạy theo đề tài này đã gây được hứng thú học tập cho học sinh và giúp học sinh giải nhiều bài khó. Giải quyết được dạng bài tập này giúp học sinh rèn luyện khả năng tư duy, phát huy tính tích cực sáng tạo trong học toán và hơn nữa giúp học sinh hệ thống kiến thức và phương pháp giải để học sinh tự tin hơn khi bước vào kì thi.

Thực tế khi thực hiện đề tài này chất lượng học sinh được tăng lên rõ rệt

Khảo sát trước khi làm đề tài: Học sinh các câu 2, 3, 11, 38, 42 phần bài tập áp dụng của đề tài này.

Lớp 12	Số HS	Điểm 8 - 10		Điểm 6,5 đến dưới 8		Điểm 5 đến 6,5		Điểm 2 đến dưới 5		Điểm dưới 2	
A7	41	6	14,63%	10	24,39%	11	26,83%	12	29,27%	2	4,88%
A13	40	3	7,5%	8	20%	13	32,5%	11	27,5%	5	12,5%

Khảo sát sau khi làm đề tài: Học sinh các câu 4, 6, 15, 39, 43 phần bài tập áp dụng của đề tài này.

Lớp 12	Số HS	Điểm 8 - 10		Điểm 6,5 đến dưới 8		Điểm 5 đến 6,5		Điểm 2 đến dưới 5		Điểm dưới 2	
A7	41	22	53,66%	11	26,83%	7	17,07%	1	2,44%	0	0%
A13	40	12	30%	16	40%	10	25%	2	5%	0	0%

Đề tài của tôi được kiểm nghiệm trong năm học 2017-2018, được học sinh đồng tình và đạt được kết quả khá cao. Các em học tập hứng thú hơn, tạo được sự đam mê yêu thích môn toán, mở ra cho học sinh cách nhìn nhận vận dụng linh hoạt, sáng tạo các kiến thức đã học, tạo nền cho học sinh tự học, tự nghiên cứu.

2, Khuyến nghị:

Đề nghị các cấp lãnh đạo tạo điều kiện giúp đỡ học sinh có nhiều hơn tài liệu tham khảo đổi mới để học sinh có thể tự học, tự nghiên cứu.

Nhà trường cần tổ chức các buổi hội thảo với các chuyên đề toán học để học sinh hiểu sâu hơn kiến thức.

Đối với học sinh thì tăng cường khả năng tự học, học theo nhóm, tổ chức các câu lạc bộ để học sinh có cơ hội thể hiện bản thân.

Mặc dù đã rất cố gắng nhưng trong bài viết này, do thời gian có hạn nên bài viết cũng không tránh khỏi những sai sót, rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến của các thầy cô giáo và các bạn đồng nghiệp để bài viết được hoàn thiện hơn.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

Hà Nội, ngày 15 tháng 5 năm 2018

Tác giả

Đặng Thị Thủy

Phần IV: TÀI LIỆU THAM KHẢO

- 1) Các đề thi thử THPT Quốc gia năm học 2016 – 2017 của một số trường và đề thi THPT Quốc gia năm học 2016 – 2017
- 2) www.diendantoanhoc.net.
- 3) www.math.vn
- 4) www.doc123.org.vn